Prefácio

Este livro foi construído ao longo de diversos cursos de Equações Diferenciais Ordinárias que ministramos no Mestrado do IMPA entre 2011 e 2017. As equações diferenciais são um tema chave na formação oferecida no IMPA, evidentemente, e vêm sendo ensinadas aqui de longa data. Também, neste século e pouco desde que o trabalho de Henri Poincaré revolucionou completamente a teoria das equações diferenciais, esta área cresceu muito, ramificou-se, adquiriu novas ferramentas e inúmeras aplicações.

Pareceu-nos, então, que seria oportuno repensar a disciplina como um todo, refletir sobre o núcleo de ideias realmente incontornáveis e os tópicos adicionais mais adequados à formação que busca o jovem matemático de nossos dias, seja ele "puro" ou "aplicado", em especial o estudante brasileiro de graduação ou pós-graduação. Um pressuposto importante nesta nossa reflexão foi que o ensino da disciplina precisa incorporar a evolução tecnológica: o computador é uma das grandes ferramentas oferecidas pelo século XX à teoria das equações diferenciais, ele precisa ser parte orgânica do ensino e aprendizagem desta teoria.

Este pressuposto acabou levantando desafios adicionais na preparação deste texto, naturalmente, até porque nós mesmos não fomos treinados dessa forma. Foi a essa altura que o Guilherme Goedert e o Heber Mesa se juntaram ao projeto, para nos auxiliarem com a sua *expertise* em questões mais tecnológicas, e o seu próprio ponto de vista como estudantes de pós-graduação.

Estrutura do texto

Curiosamente, mas não surpreendentemente, este arco de reflexão nos conduziu de volta à visão original de Poincaré, o qual, mais de cem anos atrás, advogava que as equações diferenciais devem ser abordadas mediante uma *análise qualitativa* do comportamento das soluções, complementada pelo *cálculo numérico* das mesmas. Essa visão está explanada e ilustrada no Capítulo 1, onde também introduzimos algumas das noções básicas da teoria, tais como a própria definição do que é uma equação diferencial. A partir daí, o texto se estrutura em 6 ciclos principais:

O primeiro ciclo, correspondente aos Capítulos 2 e 3, trata dos **fundamentos da teoria**, das questões básicas da existência e unicidade de soluções e do modo como elas dependem da própria equação: *Toda equação diferencial ordinária tem soluções? Quantas? Como mudam as soluções quando modificamos a própria equação diferencial? Onde estão definidas as soluções? Na reta inteira? Se não, porquê?*

O segundo ciclo, formado pelos Capítulos 4 e 5, introduz diversas **ferramentas básicas**, tanto teóricas quanto práticas, de tal forma que, desde cedo no texto, o leitor fique habilitado a analisar e resolver casos concretos e exercícios. Essas ferramentas são de dois tipos principais: métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais e técnicas de controle dos erros desses métodos; formalismo teórico da teoria qualitativa, incluindo os conceitos de fluxo, transformação de Poincaré, equivalência e conjugação. Aproveitando o ensejo, também provamos o Teorema de Recorrência de Poincaré, que ilustra de forma contundente a potência desta abordagem.

O terceiro ciclo, desenvolvido nos Capítulos 6 e 7, introduz a **teoria linear** das equações diferenciais, primeiro no caso autônomo e em seguida no caso geral, não necessariamente autônomo. A noção de exponencial de uma matriz, a fórmula de Liouville–Ostrogradskii e o Teorema de Floquet entram em cena neste estágio. O estudo das equações diferenciais lineares fornece intuição importante para o caso geral e está na base de muitos avanços mais sofisticados.

O quarto ciclo está formado pelo Capítulo 8 e é dedicado à **teoria da estabilidade** de Lyapunov. Trata-se de um tema clássico, contemporâneo do próprio Poincaré e que constitui uma bela ilustração da análise qualitativa. Ademais, é tecnicamente acessível, tem diversas aplicações práticas e teóricas e abriu caminho para importantes desenvolvimentos mais recentes, como a teoria dos expoentes de Lyapunov.

O quinto ciclo, nos Capítulos 9 e 10, trata da **teoria local**, ou seja, do estudo do fluxo na vizinhança de certas trajetórias especiais, tais como as trajetórias estacionárias e as trajetórias periódicas. Ele contém dois resultados maiores, o Teorema de Grobman–Hartman e o Teorema da Variedade Estável, nos quais a noção de hiperbolicidade desempenha um papel chave. As demonstrações fazem uso de ideias que são úteis em contextos bem mais gerais das Equações Diferenciais e dos Sistemas Dinâmicos.

O sexto ciclo, composto pelos Capítulos 11 e 12, apresenta o leitor à **teoria global** das equações diferenciais, ou seja, a resultados sobre o comportamento do fluxo como um todo, especialmente em relação com as propriedades do espaço ambiente. A essa altura, para tirar pleno proveito da teoria, é praticamente obrigatório alargar o seu escopo para incluir equações diferenciais em variedades. Discutimos alguns resultados específicos de superfícies, como o Teorema de Poincaré–Bendixson e o Teorema de Mayer, e encerramos com o belo Teorema de Poincaré–Hopf.

Aplicações computacionais, exercícios e notas

Uma característica marcante do nosso texto é que cada capítulo propõe ao leitor um problema para ser analisado por meio de métodos computacionais. Em cada caso, após uma explanação do problema, seu contexto, e ideias correlatas, apresentamos uma lista de objetivos e sugerimos um ou mais métodos para resolver o problema, a serem implementados por meio de alguma linguagem ou plataforma de programação. Cada capítulo contém ainda uma seção de exercícios relacionados com os tópicos cobertos no texto, inclusive de natureza computacional.

Encerramos cada capítulo com uma seção de notas, cujo objetivo é múltiplo. Por um lado, remetemos para essa seção a maioria das referências bibliográficas, tanto primárias quanto relativas a temas complementares, de modo a deixar o texto principal tão fluido quanto possível. Em alguns casos, discutimos brevemente certos temas afins que não são tratados nas seções precedentes. Por outro lado, incluímos nas notas informação biográfica sucinta sobre os principais personagens por trás dos resultados apresentados, inclusive informação cronológica que possa ajudar o leitor a formar uma imagem mais consistente da gênese destas ideias.

Requisitos e como utilizar

Os dois últimos capítulos requerem alguma familiaridade do leitor com conceitos da teoria das variedades diferenciáveis, tais como espaço tangente, formas diferenciais, métrica riemanniana e curvatura. Para sua conveniência, estas e outras ideias relacionadas são recordadas no Apêndice A. Adicionalmente, supõe-se que o leitor conhece os conceitos básicos da Topologia (tais como homeomorfismo e compacidade), da Álgebra Linear (autovalor, autovetor, determinante) e da Análise (difeomorfismo).

Dependendo do tempo disponível, provavelmente não será possível cobrir todo o material num único curso. A ideia é que o leitor que vai utilizar o livro para ministrar um curso possa fazer algumas escolhas, possivelmente deixando tópicos que não seja possível tratar nas aulas teóricas para serem apresentados em seminários dos alunos, por exemplo. Uma sugestão de roteiro de aulas teóricas (para um semestre de 48 horas, distribuídas em 32 aulas) é a seguinte:

Capítulo 1: Introdução da teoria. [1,5h]

Capítulo 2: Teoremas de Picard e Peano (Seções 2.1, 2.2 e 2.5.1). Dependência contínua e dependência diferenciável das soluções (Seções 2.3 e 2.4). [4,5h]

Capítulo 3: Soluções maximais (Seções 3.1 e 3.2) e Lema de Gronwall (Seção 3.3). Enunciados dos teoremas globais de dependência (Teoremas 3.10, 3.12 e 3.13). [3,0h]

Capítulo 4: Métodos de integração numérica (Seções 4.1 a 4.3) e estimativas de erros (Seção 4.5). [3,0h]

Capítulo 5: Fluxos (Seção 5.1), Teorema do Fluxo Tubular (Seção 5.2) e transformações de Poincaré (Seção 5.3). Noções de equivalência e conjugação (Seção 5.4). [4,5h]

Capítulo 6: Exponencial de uma matriz (Seções 6.1 a 6.3) e classificação de fluxos lineares hiperbólicos (Seções 6.4 e 6.5). [4,5h]

Capítulo 7: Equações lineares homogêneas, solução fundamental (Seções 7.1 e 7.2), Fórmula de Liouville–Ostrogradskii (Seção 7.3) e equações lineares não homogêneas (Seção 7.4). [4,5h]

Capítulo 8: Estabilidade linear (Seção 8.1). Funções de Lyapunov, Teoremas de Lyapunov e do Conjunto Invariante (Seção 8.2). Expoentes de Lyapunov (Seção 8.4). [4,5h]

Capítulo 9: Hiperbolicidade, Teorema de Grobman–Hartman (Seções 9.1 a 9.3): enunciado e esboço da demonstração. Enunciado do teorema para difeomorfismos (Teorema 9.16). [4,5h]

Capítulo 10: Teorema da Variedade Estável (Seções 10.1 a 10.3): enunciado e esboço da demonstração. Enunciado do teorema para órbitas periódicas (Teorema 10.14). [4,5h]

Capítulo 11: Conjuntos limite, Teorema de Poincaré–Bendixson (Seções 11.1 e 11.2). Observações sobre conjuntos limite de fluxos em superfícies (Seção 11.3). [4,5h]

Capítulo 12: Índice e característica de Euler (Seções 12.1 e 12.2). Teorema de Poincaré–Hopf (Seções 12.3 e 12.4): enunciado e esboço da demonstração. [3,0h]

Entre os temas especialmente adequados para seminários de alunos, mencionemos:

Equações diferenciais parciais (Seção 2.5.2) [1,5h]

Demonstrações dos teoremas globais de dependência (Seções 3.4 e 3.5) [3,0h]

Integração numérica em dimensões superiores (Seção 4.4) [1,5h]

Teorema de Floquet (Seção 7.5) [1,5h]

Funções de Lyapunov de equações diferenciais não autônomas (Seção 8.3)	[1,5h]
Conjugação diferenciável, enunciado do Teorema de Sternberg (Seção 9.5)	[1,5h]
Característica de Euler (Seção 12.2 e Apêndice A.6), precedendo Mayer e Poincaré–Hopf	[1,5h]
Teorema de Mayer (Seção 11.4)	[3,0h]

Recomendamos que as as aulas teóricas sejam complementadas com monitorias práticas (1,5h por semana), dedicadas aos aspectos computacionais do curso, as quais também poderão complementar a discussão teórica sobre integração numérica e estimativas de erros. A nossa sugestão é dedicar uma monitorias à apresentação do ambiente computacional que será utilizado no curso e uma monitoria a cada um dos Experimentos apresentados ao longo do livro.

No que diz respeito ao ambiente computacional, existe um grande número de possibilidades mais ou menos vantajosas. Nós optamos pela solução MATLAB/Octave, que é uma das mais populares em todo o mundo. Na verdade, trata-se de duas plataformas computacionais distintas, mas que usam sintaxes muito parecidas, sendo que o MATLAB é comercial e o Octave tem distribuição gratuita. Uma vantagem importante de plataformas como estas com relação às linguagens de programação científica, tais como o Fortran e o C, é que elas já contêm diversas ferramentas úteis, tanto numéricas como para visualização gráfica dos resultados. Para conveniência do leitor que não esteja muito familiarizado, fazemos uma breve apresentação da sintaxe MATLAB/Octave no Apêndice B. Também existem muitos manuais, aulas, tutorais e fóruns de discussão sobre o tema livremente acessíveis na internet.

Ressaltemos ainda que este livro é acompanhado por uma página na internet (endereço `edo.impa.br`) contendo diversos materiais adicionais relevantes para o curso.

Agradecimentos

Rio de Janeiro
José Espinar e Marcelo Viana