

Capítulo 9

Teorema de Grobman–Hartman

A chamada *teoria local* das equações diferenciais está baseada na seguinte estratégia: considerar certas soluções especiais da equação, tais como pontos estacionários ou trajetórias periódicas, e buscar descrever o comportamento das demais soluções em uma vizinhança. A ideia é que tal informação, obtida para diferentes soluções especiais, possa servir como ponto de partida para montar uma descrição global do comportamento da equação.

Começemos pela situação mais simples de todas: seja $p \in \mathcal{U}$ um *ponto estacionário* de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 , isto é, um ponto tal que $F(p) = 0$. A solução da equação diferencial

$$x' = F(x) \tag{9.1}$$

com condição inicial p é a função constante $x(t) \equiv p$. Será que podemos descrever o comportamento das demais soluções em uma vizinhança a partir de informação sobre o campo de vetores F no ponto p ?

É natural pensarmos na derivada $A = DF(p)$. De fato, por definição, a função $x \mapsto A(x - p)$ é a melhor aproximação linear para $F(x)$ na vizinhança de p . Então cabe perguntar se as soluções da equação

$$x' = A(x - p) \tag{9.2}$$

não serão também uma boa aproximação para as soluções da equação original (9.1). Observe que, mediante a mudança de variável $y = x - p$, esta equação corresponde a

$$y' = Ay, \tag{9.3}$$

que é uma equação linear e, portanto, pode ser resolvida completamente.

Claro que isto não pode ser sempre verdade. Considere, por exemplo, a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^2$. A derivada na origem é $A = 0$ e, portanto, todas as soluções de (9.3) são constantes neste caso. Ao mesmo tempo, $x' = x^2$ não tem nenhuma solução constante, a não ser $x(t) \equiv 0$. Portanto, os comportamentos das soluções das duas equações são bem distintos neste caso. O Exemplo 9.8 abaixo também é ilustrativo desta possibilidade.

Mas o principal resultado neste capítulo, o Teorema de Grobman–Hartman, afirma que as as soluções das duas equações têm efetivamente comportamentos análogos – mais precisamente, os dois fluxos são conjugados (Definição 5.14) na vizinhança de seus pontos estacionários – desde que suponhamos que a derivada A é um *campo de vetores linear hiperbólico*. Lembre (Seção 6.5) que esta suposição significa que todos os valores característicos de A têm parte real não nula. Então diremos que p é um *ponto estacionário hiperbólico* de F . O enunciado preciso e a demonstração serão dados nas Seções 9.2 e 9.3.

Os mesmos métodos também provam uma versão do Teorema de Grobman–Hartman para sistemas com tempo discreto, conforme veremos na Seção 9.4. Nos dois casos, tempo contínuo e tempo discreto, a conclusão do teorema é puramente topológica: a conjugação é dada por um homeomorfismo que não é necessariamente diferenciável. Na Seção 9.5 exibimos alguns contraexemplos, assim como algumas situações particulares interessantes em que a conjugação, é de fato, diferenciável.

Começemos, na Seção 9.1, por estudar as propriedades básicas da noção de hiperbolicidade.

9.1 Pontos estacionários hiperbólicos

Antes de definirmos a noção de ponto estacionário hiperbólico, vamos estudar um conceito um pouco mais geral e estudar as suas principais propriedades.

9.1.1 Pontos estacionários simples

Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^1 definido em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ e seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto estacionário de F . Dizemos que $p \in \mathcal{U}$ é um *ponto estacionário simples* se a aplicação linear derivada $DF(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um isomorfismo, ou seja, se 0 não é autovalor de $DF(p)$.

Proposição 9.1. *Se $p \in \mathcal{U}$ é ponto estacionário simples de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 , então p é ponto estacionário isolado.*

Demonstração. Pelo Teorema da Função Inversa, existe alguma vizinhança V de p tal que a restrição $F|_V$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança da origem. Em particular, p é o único zero do campo de vetores F em V . \square

Outra propriedade importante dos pontos estacionários simples é que eles persistem quando o campo de vetores sofre pequenas modificações. Para formular este fato de modo preciso, começamos por introduzir a seguinte noção.

Suponha que o campo de vetores F é de classe C^k , $k \geq 1$. Uma *família parametrizada de campos de vetores* de classe C^k passando por F é uma aplicação

$$\mathcal{F} : (-a, a)^l \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$$

de classe C^k tal que $F_0 \equiv F$. O número $l \geq 1$ na definição é chamado *número de parâmetros da família*.

Observação 9.2. Também é possível considerar famílias com um número infinito de parâmetros, substituindo $(-a, a)^l$ por uma vizinhança da origem em um espaço de Banach qualquer. A proposição a seguir permanece válida nessa generalidade.

Proposição 9.3. *Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$ e seja \mathcal{F} uma família parametrizada de campos de vetores de classe C^k passando por F . Suponha que p é ponto estacionário simples de F . Então, existem $\delta > 0$, uma vizinhança V de p e uma função*

$$(-\delta, \delta)^l \rightarrow V, \quad \lambda \mapsto p_\lambda$$

de classe C^k tal que $p_0 = p$ e, para todo $\lambda \in (-\delta, \delta)^l$, o ponto p_λ é o único ponto estacionário do campo de vetores $F_\lambda : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ em V . Além disso, este ponto estacionário é simples.

Demonstração. Observe que

$$\partial_x \mathcal{F}(0, p) = DF_0(p) = DF(p).$$

Portanto, a hipótese de que o ponto estacionário p é simples significa que esta derivada parcial é um isomorfismo. Portanto, estamos em condições de aplicar o Teorema da Função Implícita, o qual afirma que existe uma vizinhança $(-\delta, \delta)^l$ de 0, uma vizinhança V de p e uma função $\lambda \mapsto p_\lambda$ de classe C^k de $(-\delta, \delta)^l$ em V tal que

$$p_0 = p \text{ se } F_\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = p_\lambda.$$

Isto prova a primeira parte do enunciado. Para deduzir a segunda parte basta observar que $DF_\lambda(p_\lambda)$ depende continuamente de λ e é igual a $DF(p)$ quando $\lambda = 0$. Como o conjunto dos isomorfismos é aberto no espaço das aplicações lineares de \mathbb{R}^d , segue que, reduzindo δ se necessário, $DF_\lambda(p_\lambda)$ é um isomorfismo para todo $\lambda \in (-\delta, \delta)^l$. \square

A função $\lambda \mapsto p_\lambda$ é chamada *continuação* do ponto estacionário p .

Exemplo 9.4. Considere $\mathcal{F} : (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F_\lambda(x) = x^2 - \lambda$. A origem $p = 0$ é ponto estacionário de $F = F_0$. Note que $DF(p) = 0$ e portanto este ponto estacionário não é simples. Por um lado, para $\lambda < 0$ o campo de vetores F_λ não tem qualquer ponto estacionário. Por outro lado, para $\lambda > 0$ o campo de vetores F_λ tem dois pontos estacionários, a saber $\pm\sqrt{\lambda}$. Estes pontos estacionários são simples, pois $DF_\lambda(\pm\sqrt{\lambda}) = \pm 2\sqrt{\lambda}$ é diferente de zero. Note também que $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ não é diferenciável.

Também podemos formular a condição de simplicidade em termos da transformação tempo-1 do fluxo:

Proposição 9.5. *Seja $f = f^1$ o tempo-1 do fluxo do campo de vetores F de classe C^1 . A derivada $Df(p)$ no ponto estacionário p é dada por*

$$Df(p) = e^{DF(p)}. \quad (9.4)$$

Em particular, $Df(p)$ é um isomorfismo e p é ponto estacionário simples se e somente se 1 não é autovalor de $Df(p)$.

Demonstração. Para cada $x \in \mathcal{U}$, defina $X_x(t) = Df^t(x)$. Como vimos no Teorema 2.30, esta função é solução da equação linear

$$\begin{cases} X'_x(t) = DF(f^t(x))X_x(t) \\ X_x(0) = \text{id}. \end{cases}$$

Para $x = p$ esta equação é autônoma:

$$\begin{cases} X'_p(t) = DF(p)X_p(t) \\ X_p(0) = \text{id}. \end{cases}$$

e a sua solução é dada por $X_p(t) = e^{tDF(p)}$. Tomando $t = 1$ obtemos que $Df(p) = e^{DF(p)}$. As demais afirmações no enunciado são consequências imediatas desta igualdade: lembre (Exercício 6.7) que os valores característicos da exponencial de uma matriz são as imagens dos valores característicos da matriz pela aplicação exponencial no plano complexo. \square

Este resultado motiva a seguinte definição: Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo de classe C^1 e seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto fixo de f . Dizemos que p é um *ponto fixo simples* se 1 não é autovalor da derivada $Df(p)$. A este respeito, veja também o Exercício 9.2.

9.1.2 Pontos estacionários hiperbólicos

Dizemos que $p \in \mathcal{U}$ é *ponto estacionário hiperbólico* se a derivada $A = DF(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um *campo de vetores linear hiperbólico*, ou seja, se todos os seus valores característicos têm parte real não nula. É claro que se p é hiperbólico então também é simples. Portanto, todos os resultados anteriores se aplicam imediatamente a pontos estacionários hiperbólicos.

No contexto da Proposição 9.3, observe que se p é ponto estacionário hiperbólico então a sua *continuação* p_λ também é ponto estacionário hiperbólico, para todo λ próximo de zero. Para ver isso basta notar que a aplicação $\lambda \mapsto A_\lambda = DF_\lambda(p_\lambda)$ é contínua e lembrar (Proposição 6.12) que o conjunto dos campos de vetores lineares hiperbólicos é aberto no espaço de todas as aplicações lineares de \mathbb{R}^d .

Conforme observamos no Capítulo 6, se A é um campo de vetores linear hiperbólico, então existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ satisfazendo:

- Os subespaços E^s e E^u são invariantes por A , isto é, $A(E^s) = E^s$ e $A(E^u) = E^u$.
- Os valores característicos de $A|_{E^s}$ são os valores característicos de A cuja parte real é negativa.
- Os valores característicos de $A|_{E^u}$ são os valores característicos de A cuja parte real é positiva.

Lembre que chamamos E^s de *subespaço estável* e E^u de *subespaço instável* de A e classificamos os pontos estacionários hiperbólicos em três classes disjuntas:

- *atratores*, se todos os valores característicos de A têm parte real negativa: então todas as soluções da equação $x' = Ax$ convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$; neste caso $E^u = \{0\}$;

- *repulsores*, se todos os valores característicos de A têm parte real positiva: então todas as soluções da equação $x' = Ax$ convergem para zero quando $t \rightarrow -\infty$; neste caso $E^s = \{0\}$;
- *selas*, em qualquer outro caso.

Analogamente ao que fizemos na Proposição 9.5, podemos formular a condição de hiperbolicidade em termos do tempo-1 do fluxo de F :

Corolário 9.6. *Seja $f = f^1$ o tempo-1 do fluxo do campo de vetores F . O ponto estacionário p é hiperbólico se e somente se $Df(p)$ não tem valores característicos com módulo igual a 1.*

Demonstração. Isto é uma consequência simples da Proposição 9.5. De fato, conforme observamos anteriormente, a relação (9.4) implica que os valores característicos de $Df(p)$ são as imagens dos valores característicos de $DF(p)$ pela exponencial complexa. Portanto, basta observar que a exponencial envia o complementar do eixo imaginário $\{z : \Re z = 0\}$ no complementar do disco unitário $\{z : |z| = 1\}$. \square

Este resultado também motiva a seguinte definição. Sejam $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um difeomorfismo de classe C^1 e $p \in \mathcal{U}$ um ponto fixo de f , isto é, um ponto tal que $f(p) = p$. Dizemos que $p \in \mathcal{U}$ é *ponto fixo hiperbólico* de f se a derivada $B = Df(p)$ não tem valores característicos com módulo igual a 1. Então também dizemos que $B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma *transformação linear hiperbólica*. Também dizemos que o ponto fixo p é:

- um *atrator*, se todos os valores característicos de $B = Df(p)$ têm módulo menor que 1;
- um *repulsor*, se todos os valores característicos de B têm módulo maior que 1;
- uma *sela*, em qualquer outro caso.

Se B é uma transformação linear hiperbólica então existe uma decomposição $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ do espaço como soma direta de dois subespaços invariantes por B

$$B(E^s) = E^s \quad \text{e} \quad B(E^u) = E^u$$

e tais que os valores característicos de $B|_{E^s}$ são os valores característicos de B com módulo menor que 1 e os valores característicos de $B|_{E^u}$ são os valores característicos de B com módulo maior que 1. Chamamos E^s de *subespaço estável* e E^u de *subespaço instável* de B .

Portanto, A é um campo de vetores linear hiperbólico se e somente se $B = e^A$ é uma transformação linear hiperbólica. Além disso, nesse caso o subespaço estável de A coincide com o subespaço estável de B , e o mesmo vale para os subespaços instáveis. Analogamente, p é ponto estacionário hiperbólico (respectivamente atrator, repulsor ou sela) do campo de vetores se e somente se p é ponto fixo hiperbólico (respectivamente atrator, repulsor ou sela) do tempo-1 do respectivo fluxo.

9.2 Teorema de Grobman–Hartman para fluxos

O Teorema de Grobman–Hartman afirma que se p é ponto estacionário hiperbólico do campo de vetores F então o fluxo da equação (9.1) restrito a uma vizinhança de p é *conjugado* ao fluxo da equação linear (9.3) restrito a uma vizinhança da origem. Lembre que a noção de conjugação foi introduzida na Definição 5.14 e observe a Figura 5.6.

Teorema 9.7 (Teorema de Grobman–Hartman para fluxos). *Seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto estacionário hiperbólico de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 . Então existem vizinhanças \mathcal{V} de p e \mathcal{W} da origem e existe um homeomorfismo $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ que envia p em 0 e conjuga o fluxo de F restrito a \mathcal{V} ao fluxo do campo linear $A = DF(p)$ restrito a \mathcal{W} .*

Eis mais um exemplo de que a conclusão do Teorema 9.7 pode ser falsa se o ponto estacionário não for hiperbólico:

Exemplo 9.8. Considere $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (-y - x^3, x - y^3)$. A origem $p = (0, 0)$ é um ponto estacionário e a derivada é dada por

$$A = DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que os valores característicos de A são $\pm i$ e, portanto, A não é um campo de vetores hiperbólico. As soluções da equação linear $y' = Ay$ têm a forma geral

$$\begin{cases} x(t) = a \sin t + b \cos t \\ y(t) = -a \cos t + b \sin t \end{cases}$$

e, portanto, são todas periódicas com período 2π . Por outro lado, considere a função $H(x, y) = x^2 + y^2$. É fácil ver que esta função é estritamente decrescente ao longo de trajetórias da equação $x' = F(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 2x(t)(-y(t) - x(t)^3) + 2y(t)(x(t) - y(t)^3) \\ &= -x(t)^4 - y(t)^4 \end{aligned}$$

e a última expressão é estritamente negativa em todo o ponto, menos na origem. Este fato implica que $x' = F(x)$ não tem qualquer solução periódica, exceto a solução constante igual a $(0, 0)$. Em particular, os fluxos de F e de A não podem ser conjugados em nenhuma vizinhança da origem. Observe também a Figura 9.1.

Vale a pena enfatizar que o Teorema de Grobman–Hartman é um resultado puramente local: ele se refere apenas às trajetórias das restrições dos dois campos de vetores a vizinhanças dos respectivos pontos estacionários. A este respeito, observe que a trajetória de um ponto $x \in \mathcal{V}$ para a restrição $F|_{\mathcal{V}}$ coincide com a *componente conexa* de x na interseção de \mathcal{V} com a trajetória de x para F . Então, se representarmos por f^t o fluxo de F e por g^t o fluxo de A , a afirmação de que H conjuga os fluxos das restrições dos dois campos de vetores significa que

$$H(f^t(x)) = g^t(H(x))$$

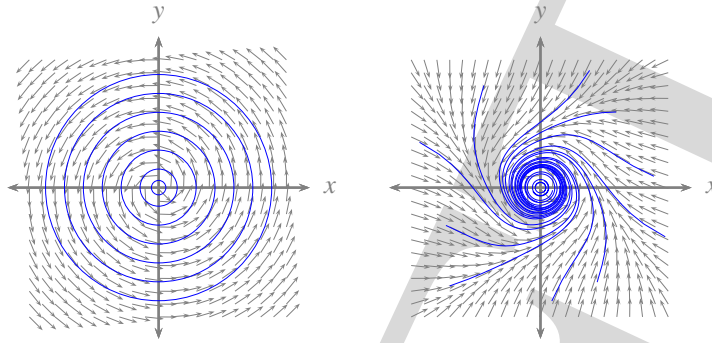


Figura 9.1: O fluxo da equação no Exemplo 9.8 (à direita) não é conjugado ao fluxo da sua equação linearizada (à esquerda) em nenhuma vizinhança da origem.

para quaisquer $x \in \mathcal{U}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $f^s(x) \in \mathcal{V}$ e $g^t(H(x)) \in \mathcal{W}$ para todo s entre 0 e t . O exemplo a seguir ilustra estas observações. Deixamos a cargo do leitor (Exercício 9.4) verificar todas as afirmações.

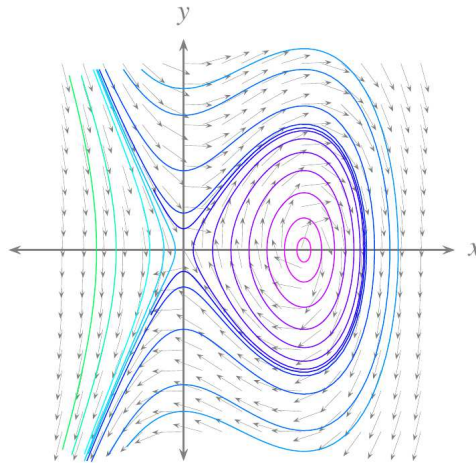


Figura 9.2: Esboço das soluções da equação (9.5).

Exemplo 9.9. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2$ e considere o campo de vetores

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (\partial_y H(x, y), -\partial_x H(x, y)) = (2y, 6x - 6x^2)$$

(F é o chamado *campo de vetores hamiltoniano* de H) e a respectiva equação diferencial

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 6x - 6x^2. \end{cases} \quad (9.5)$$

A Figura 9.2 descreve algumas soluções da equação (9.5). Os pontos críticos $p = (0, 0)$ e $q = (1, 0)$ da função H são os pontos estacionários de F : o primeiro é hiperbólico e o segundo não é. O ponto q é um mínimo local de H , enquanto que p não é nem máximo nem mínimo. Observe também que a função H é constante ao longo das soluções de (9.5). Usando este fato, pode mostrar-se que *o ponto estacionário hiperbólico p é acumulado por trajetórias periódicas de F* (veja a Figura 9.2). Por outro lado, é claro que *o campo de vetores linear $A = DF(p)$ não tem qualquer trajetória periódica*, a não ser a trajetória constante igual a $(0, 0)$. Mas estas duas afirmações não contradizem o Teorema de Grobman–Hartman. A razão é que as trajetórias periódicas de F não estão confinadas em nenhuma vizinhança de p : *a restrição de F a qualquer vizinhança de p não tem nenhuma trajetória periódica*, a não ser a trajetória constante igual a p .

9.3 Demonstração do Teorema de Grobman–Hartman

Antes de começarmos a demonstração, vale a pena apontar que o Teorema 9.7 permanece válido em dimensão infinita: no que segue denotaremos $E = \mathbb{R}^d$ mas os argumentos se estendem imediatamente para qualquer espaço de Banach.

A este respeito, observe que a noção de *ponto estacionário hiperbólico* faz sentido no contexto de um espaço de Banach qualquer: simplesmente, pedimos que o espectro da derivada do campo de vetores no ponto não intersecte o eixo imaginário de \mathbb{C} . Do mesmo modo, dizemos que um ponto fixo de um difeomorfismo é um *ponto fixo hiperbólico* se o espectro da derivada do difeomorfismo nesse ponto não intersecta o círculo unitário em \mathbb{C} .

9.3.1 Globalização da dinâmica

O primeiro passo na demonstração do Teorema 9.7 consiste em globalizar o problema: estendemos o campo de vetores F de uma vizinhança do ponto estacionário p a todo o espaço E , satisfazendo certas condições lipschitzianas. Para simplificar as nossas notações, suporemos que $p = 0$.

Lema 9.10. *Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$ definida em um aberto \mathcal{U} que contém a origem de E . Suponha que $F(0) = 0$ e denote $A = DF(0)$. Então, dado qualquer $\delta > 0$, existem $r > 0$ e uma aplicação $G : E \rightarrow E$ de classe C^k tal que*

1. $G \equiv F$ em $B_r(0)$ e $G \equiv A$ em $E \setminus B_{2r}(0)$ e $\|G(x) - Ax\| \leq \delta$ para todo $x \in E$.
2. $\|D(G - A)\| \leq \delta$ e portanto a diferença $G - A$ é δ -lipschitziana; consequentemente, G é lipschitziano, com constante de Lipschitz $\|A\| + \delta$.

Demonstração. Escreva $F(x) = Ax + \Phi(x)$ para $x \in \mathcal{U}$. Note que $\Phi(0) = 0$ e $D\Phi(0) = 0$. Fixe uma função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que $\alpha(x) = 1$ para $x \leq 1$ e $\alpha(x) = 0$ para $x \geq 2$. Seja $C = \max |D\alpha|$. Como $\alpha(1) = 1$ e $\alpha(2) = 0$, segue do

Teorema do Valor Médio que $C \geq 1$. Considere $r > 0$ suficientemente pequeno para que a bola $B_{2r}(0)$ esteja contida em \mathcal{U} e

$$\|\Phi(x)\| \leq \delta \quad \text{e} \quad \|D\Phi(x)\| \leq \frac{\delta}{4C} \quad \text{para todo } x \in B_{2r}(0). \quad (9.6)$$

Então defina

$$G : E \rightarrow E, \quad G(x) = Ax + \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \Phi(x).$$

Esta definição contém um pequeno abuso de linguagem, porque $\Phi(x)$ só está definida para $x \in \mathcal{U}$. No entanto, se $x \notin \mathcal{U}$ então $\|x\| \geq 2r$ e portanto o fator $\alpha(\|x\|/r)$ é igual a zero. Então, basta interpretar a parcela $\alpha(\|x\|/r)\Phi(x)$ como sendo nula nesse caso.

Por construção, G é de classe C^k se F é de classe C^k . A propriedade (1) no enunciado também segue imediatamente da definição de G . Note, em particular, que

$$\|G(x) - Ax\| = \left\| \alpha \left(\frac{\|x\|}{r} \right) \Phi(x) \right\| \leq \sup\{\|\Phi(x)\| : x \in B_{2r}(0)\} \leq \delta \quad \text{para todo } x \in E.$$

Para provar a propriedade (2) basta mostrar que $\|D(G - A)(x)\| \leq \delta$ para todo $x \in E$. Consideramos três casos, dependendo do valor da norma de x . Se $\|x\| < r$ então

$$(G - A)(y) = \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \Phi(y) = \Phi(y)$$

para todo y próximo de x . Portanto, $D(G - A)(x) = D\Phi(x)$. Agora basta atentar para (9.6) para concluir que a derivada é majorada por $\delta/4C < \delta$ neste caso. Se $\|x\| > 2r$ então

$$(G - A)(y) = \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \Phi(y) = 0$$

para todo y próximo de x . Portanto, $D(G - A)(x) = 0$ neste caso. Resta tratar o caso $r \leq \|x\| \leq 2r$. Temos que

$$D(G - A)(x) = \alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) D\Phi(x) + D\alpha \left(\frac{\|y\|}{r} \right) \frac{D\|x\|}{r} \Phi(x). \quad (9.7)$$

Temos que $|\alpha| \leq 1$ e $\|D\alpha\| \leq C$. A derivada da aplicação $x \mapsto \|x\|$ é a aplicação linear

$$v \mapsto \frac{x \cdot v}{\|x\|}$$

cuja norma é igual a 1. A escolha de r em (9.6) dá que $\|D\Phi\| \leq \delta/4C$ e, pelo Teorema do Valor Médio, isto também implica que

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi(x) - \Phi(0)\| \leq \frac{\delta}{4C} \|x - 0\| \leq \frac{\delta r}{2C}.$$

Usando estas estimativas em (9.7), obtemos que

$$\|D(G - A)(x)\| \leq \frac{\delta}{4C} + \frac{C}{r} \frac{\delta r}{2C} \leq \delta.$$

Isto conclui a demonstração da propriedade (2) no enunciado. \square

Seja $(g^t)_t$ o fluxo do campo de vetores G . Segue do Corolário 5.6 e da segunda parte do Lema 9.10 que este fluxo é completo. Também temos:

Corolário 9.11. *Existem $C > 0$ e $M > 0$, dependendo apenas de $\|A\|$, tais que a diferença $\psi_t = g^t - e^{tA}$ é $(C\delta)$ -lipschitziana e satisfaz $\|\psi_t\|_0 \leq M\delta$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Demonstração. Não é restrição supor que $\delta \in (0, 1)$ e faremos isso. Lembre que $\Psi = G - A$. Pela demonstração do Teorema de Picard,

$$g^t(x) = x + \int_0^t G(g^s(x)) ds \quad \text{e} \quad e^{tA}(x) = x + \int_0^t A(e^{sA}(x)) ds.$$

Portanto, para todo $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|\psi_t(x) - \psi_t(y)\| &= \left\| \int_0^t [G(g^s(x)) - G(g^s(y))] ds - \int_0^t A(e^{sA}(x) - e^{sA}(y)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t [\Psi(g^s(x)) - \Psi(g^s(y))] ds + \int_0^t A(\psi_s(x) - \psi_s(y)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\Psi(g^s(x)) - \Psi(g^s(y))\| ds + \int_0^t \|A\| \|\psi_s(x) - \psi_s(y)\| ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema 9.10, a função Ψ e o campo de vetores G são lipschitzianos, com constantes de Lipschitz δ e $\|A\| + 1$ respectivamente. Usando o Corolário 5.6, segue que cada transformação g^s é lipschitziana, com constante de Lipschitz $e^{\|A\|s}$, para todo $s \in [0, 1]$. Portanto, a desigualdade anterior implica

$$\begin{aligned} \|\psi_t(x) - \psi_t(y)\| &\leq \delta \int_0^t \|g^s(x) - g^s(y)\| ds + \int_0^t \|A\| \|\psi_s(x) - \psi_s(y)\| ds \\ &\leq \delta e^{\|A\|t} \|x - y\| + \int_0^t \|A\| \|\psi_s(x) - \psi_s(y)\| ds \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$. Pelo Lema de Gronwall (Proposição 3.9) aplicado a $u(t) = \|\psi_t(x) - \psi_t(y)\|$, segue que

$$\|\psi_t(x) - \psi_t(y)\| \leq \delta e^{\|A\|t} \|x - y\| e^{\|A\|t}.$$

Isto prova a primeira afirmação no corolário, com $C = e^{2\|A\|}$.

Resta provar que o conjunto $\{\psi_t(x) : t \in [0, 1] \text{ e } x \in \mathbb{R}^d\}$ é limitado. Observando que $\psi_t(0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue do que dissemos no parágrafo anterior que

$$\|\psi_t(x)\| \leq C\delta \|x\| \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e todo } x \in \mathbb{R}^d. \quad (9.8)$$

Não é restrição supor que δ é suficientemente pequeno para que

$$2C\delta e^{\|A\|} < 1. \quad (9.9)$$

Afirmamos que

$$\psi_t(x) = 0 \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e todo } x \in \mathbb{R}^d \text{ com } \|x\| > 4re^{\|A\|}. \quad (9.10)$$

De fato,

$$\|g^t(x)\| = \|e^{tA}x + \psi_t(x)\| \geq \|e^{tA}x\| - \|\psi_t(x)\| \geq e^{-\|A\|t}\|x\| - C\delta\|x\|.$$

Levando em conta (9.9), segue que

$$\|g^t(x)\| \geq \frac{1}{2}e^{-\|A\|t}\|x\| > 2r \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Como os campos de vetores G e A coincidem no complementar da bola $B_{2r}(0)$, isto implica que

$$g^t(x) = e^{tA}x \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Isto prova a afirmação (9.10). Finalmente, as propriedades (9.8) e (9.10) implicam que

$$\|\psi_t(x)\| \leq C\delta 4r e^{\|A\|t} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Claro que não é restrição supormos que $r < 1$. Então, esta desigualdade prova a última afirmação no enunciado, com $M = 4Ce^{\|A\|}$. \square

Também usaremos o seguinte corolário do Teorema do Ponto Fixo para Contrações (Teorema 2.10) que deixamos para o leitor nos Exercícios 9.9 e 9.10.

Corolário 9.12. *Seja $B : E \rightarrow E$ é um isomorfismo linear de um espaço de Banach E e seja $\epsilon < \|B^{-1}\|^{-1}$.*

1. *Se $\psi : E \rightarrow E$ é uma aplicação ϵ -lipschitziana então $B + \psi : E \rightarrow E$ é um homeomorfismo e a sua inversa é lipschitziana com constante de Lipschitz*

$$\frac{\|B^{-1}\|}{1 - \epsilon\|B^{-1}\|}.$$

2. *Se $\psi : E \rightarrow E$ é uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$ com $\|D\psi(x)\| \leq \epsilon$ para todo $x \in E$ então $B + \psi : E \rightarrow E$ é um difeomorfismo de classe C^k .*

9.3.2 Tempo discreto

O próximo passo da demonstração do Teorema 9.7 é resolver o problema da conjugação no caso de transformações.

Teorema 9.13. *Dado qualquer isomorfismo linear hiperbólico $B : E \rightarrow E$ existe $\epsilon > 0$ tal que, dadas quaisquer aplicações ϵ -lipschitzianas $\phi : E \rightarrow E$ e $\psi : E \rightarrow E$, existe uma única aplicação contínua $h : E \rightarrow E$ satisfazendo:*

1. $(B + \phi) \circ h = h \circ (B + \psi)$;
2. $\sup\{\|h(x) - x\| : x \in E\} < +\infty$.

Além disso, h é um homeomorfismo.

Demonstração. A hipótese de que B é hiperbólico será usada da seguinte forma. Considere a decomposição $E = E^s \oplus E^u$ como soma direta do subespaço estável e do subespaço instável de B . Como os valores característicos de $B|E^s$ têm módulo menor que 1 e os valores característicos de $B|E^u$ têm módulo maior que 1, é possível encontrar (Exercício 9.8) uma norma $\|\cdot\|$ no espaço E e um número $\lambda < 1$ tais que

- $\|B(v_s)\| \leq \lambda \|v_s\|$ para todo $v_s \in E^s$, ou seja, $\|B|E^s\| \leq \lambda$;
- $\|B(v_u)\| \geq \lambda^{-1} \|v_u\|$ para todo $v_u \in E^u$, ou seja, $\|(B|E^u)^{-1}\| \leq \lambda$;
- $\|v_s + v_u\| = \max\{\|v_s\|, \|v_u\|\}$ para quaisquer $v_s \in E^s$ e $v_u \in E^u$.

Vamos mostrar que a conclusão do teorema vale desde que suponhamos

$$\epsilon \|B^{-1}\| < 1 - \lambda. \quad (9.11)$$

Considere o espaço $C^0(E)$ das funções contínuas limitadas $v : E \rightarrow E$, munido da norma dada por

$$\|v\|_0 = \sup \{ \|v(x)\| : x \in E \}. \quad (9.12)$$

Então $C^0(E)$ é um espaço de Banach (Exercício 9.11). De acordo com as duas condições no enunciado do teorema, buscamos uma aplicação $h : E \rightarrow E$ da forma $h = \text{id} + v$ satisfazendo:

- (i) $(B + \phi) \circ (\text{id} + v) = (\text{id} + v) \circ (B + \psi)$ e
- (ii) $v \in C^0(E)$.

A condição em (i) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$B \circ v - v \circ (B + \psi) = \psi - \phi \circ (\text{id} + v). \quad (9.13)$$

Vamos mostrar que esta equação tem uma única solução $v \in C^0(E)$.

Lema 9.14. A aplicação linear $\mathcal{L} : C^0(E) \rightarrow C^0(E)$ definida por

$$\mathcal{L}(w) = B \circ w - w \circ (B + \psi).$$

é um isomorfismo e satisfaz $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda}$.

Demonstração. Queremos mostrar que para todo $v \in C^0(E)$ existe um único $w \in C^0(E)$ tal que $\mathcal{L}(w) = v$ e que essa função w satisfaz:

$$\|w\|_0 \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda} \|v\|_0.$$

Vamos dividir o argumento em três casos, dependendo da natureza do isomorfismo hiperbólico B .

Suponha que B é um repulsor, ou seja, que $E^s = \{0\}$. Considere a aplicação $T : C^0(E) \rightarrow C^0(E)$ definida por

$$T(w) = B^{-1} \circ v + B^{-1} \circ w \circ (B + \psi).$$

A relação $\mathcal{L}(w) = v$ pode ser reescrita como uma equação de ponto fixo:

$$w = T(w). \quad (9.14)$$

Agora, observe que T é uma contração: dados quaisquer $w_1, w_2 \in C^0(E)$,

$$\begin{aligned} \|T(w_1) - T(w_2)\|_0 &= \|B^{-1} \circ (w_1 - w_2) \circ (B + \psi)\|_0 \\ &\leq \|B^{-1}\| \|(w_1 - w_2) \circ (B + \psi)\|_0 \leq \lambda \|w_1 - w_2\|_0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.10, segue que existe um único $w \in C^0(E)$ que satisfaz (9.14). Além disso,

$$\|w\|_0 \leq \frac{1}{1-\lambda} \|T(0)\|_0 = \frac{\|B^{-1}(v)\|_0}{1-\lambda} \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1-\lambda} \|v\|_0.$$

Isto prova o lema neste caso.

Agora suponha que B é um atrator. A condição (9.11) implica que $\epsilon < \|B^{-1}\|^{-1}$, de tal forma que podemos usar o Corolário 9.12 para concluir que a aplicação $B + \psi$ é um homeomorfismo. Então, a relação $\mathcal{L}(w) = v$ pode ser reescrita como uma equação de ponto fixo:

$$w = T(w) \quad (9.15)$$

onde $T : C^0(E) \rightarrow C^0(E)$ é a aplicação definida por

$$T(w) = -v \circ (B + \psi)^{-1} + (B \circ w) \circ (B + \psi)^{-1}.$$

Esta aplicação também é uma contração: dados quaisquer $w_1, w_2 \in C^0(E)$,

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_0 = \|B \circ (w_1 - w_2) \circ (B + \psi)^{-1}\|_0 \leq \|B\| \|(w_1 - w_2) \circ (B + \psi)^{-1}\|_0 \leq \lambda \|w_1 - w_2\|_0.$$

Pelo Teorema 2.10, segue que existe um único $w \in C^0(E)$ que satisfaz (9.15). Além disso,

$$\|w\|_0 \leq \frac{1}{1-\lambda} \|T(0)\|_0 = \frac{\|v \circ (B + \psi)^{-1}\|_0}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} \|v\|_0.$$

Isto implica a conclusão do lema pois $\|B^{-1}\| > 1$ se B é atrator.

Finalmente, suponha que B é uma sela. Considere os seguintes subespaços de $C^0(E)$:

$$C^0(E, E^s) = \{v \in C^0(E) : v(E) \subset E^s\} \quad \text{e} \quad C^0(E, E^u) = \{v \in C^0(E) : v(E) \subset E^u\}.$$

Dado qualquer $v \in C^0(E)$ e $x \in E$, podemos decompor

$$v(x) = v_s(x) + v_u(x) \quad \text{com} \quad v_s(x) \in E^s \quad \text{e} \quad v_u(x) \in E^u.$$

Esta decomposição é única e as aplicações $v_s : E \rightarrow E^s$ e $v_u : E \rightarrow E^u$ definidas desta forma são limitadas:

$$\|v_s(x)\| \leq \|v(x)\| \leq \|v\|_0 \quad \text{e} \quad \|v_u(x)\| \leq \|v(x)\| \leq \|v\|_0 \quad \text{para todo } x \in E.$$

Isto prova que

$$C^0(E) = C^0(E, E^s) \oplus C^0(E, E^u).$$

Além disso, é claro que estes subespaços são invariantes pela aplicação linear:

$$\mathcal{L}(C^0(E, E^s)) \subset C^0(E, E^s) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(C^0(E, E^u)) \subset C^0(E, E^u),$$

uma vez que E^s e E^u são invariantes por B . As restrições \mathcal{L}_s e \mathcal{L}_u da aplicação \mathcal{L} a estes dois subespaços estão dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s : C^0(E, E^s) &\rightarrow C^0(E, E^s) & \mathcal{L}_s(v_s) &= (B | E^s) \circ v - v \circ (B + \psi) \\ \mathcal{L}_u : C^0(E, E^u) &\rightarrow C^0(E, E^u) & \mathcal{L}_u(v_u) &= (B | E^u) \circ v - v \circ (B + \psi). \end{aligned}$$

Dado $v \in C^0(E)$ considere a sua decomposição $v = v_s + v_u$. Como $B | E^s$ é um atrator, os argumentos do segundo parágrafo desta demonstração dão que existe $w_s \in C^0(E, E^s)$ tal que $\mathcal{L}_s(w_s) = v_s$ e

$$\|w_s\|_0 \leq \frac{\|(B | E^s)^{-1}\|}{1 - \lambda} \|v_s\|_0 \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda} \|v\|_0.$$

Analogamente, como $B | E^u$ é um repulsor, os argumentos do primeiro parágrafo desta demonstração dão que existe $w_u \in C^0(E, E^s)$ tal que $\mathcal{L}_u(w_u) = v_u$ e

$$\|w_u\|_0 \leq \frac{\|(B | E^u)^{-1}\|}{1 - \lambda} \|v_u\|_0 \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda} \|v\|_0.$$

Tome $w = w_s + w_u$. Então,

$$\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w_s) + \mathcal{L}(w_u) = \mathcal{L}_s(w_s) + \mathcal{L}_u(w_u) = v_s + v_u = v$$

e

$$\|w\|_0 \leq \max\{\|w_s\|_0, \|w_u\|_0\} \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda} \|v\|_0.$$

Isto completa a demonstração do lema. \square

Agora podemos reescrever (9.13) como uma equação de ponto fixo:

$$v = \mathcal{L}^{-1}(\psi - \phi \circ (\text{id} + v)). \quad (9.16)$$

Designe por $T(v)$ a expressão no lado direito desta relação. Dados quaisquer $v_1, v_2 \in C^0(E)$,

$$\begin{aligned} \|T(v_1) - T(v_2)\|_0 &= \|\mathcal{L}^{-1}(\phi \circ (\text{id} + v_2) - \phi \circ (\text{id} + v_1))\|_0 \\ &\leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda} \|\phi \circ (\text{id} + v_2) - \phi \circ (\text{id} + v_1)\|_0 \leq \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \lambda} \epsilon \|v_2 - v_1\|_0, \end{aligned}$$

uma vez que ϕ é ϵ -lipschitziana. Supondo que

$$\epsilon < (1 - \lambda) \|B^{-1}\|^{-1},$$

segue que a aplicação $v \mapsto T(v)$ é uma contração em $C^0(E)$. Consequentemente, a equação de ponto fixo (9.16) admite uma única solução. Isto significa que existe

uma única função $v \in C^0(E)$ que satisfaz a equação a condição (i) acima, tal como pretendíamos provar.

Resta verificar que $h = \text{id} + v$ é um homeomorfismo. Para tal, considere a função $u \in C^0(E)$ que satisfaz a condição (i) com os papéis de ϕ e ψ invertidos, ou seja:

$$(B + \psi) \circ (\text{id} + u) = (\text{id} + u) \circ (B + \phi). \quad (9.17)$$

Denote $g = (\text{id} + v) \circ (\text{id} + u)$. Então,

$$(B + \phi) \circ (\text{id} + v) \circ (\text{id} + u) = (\text{id} + v) \circ (B + \psi) \circ (\text{id} + u) = (\text{id} + v) \circ (\text{id} + u) \circ (B + \phi).$$

Em outras palavras,

$$(B + \phi) \circ g = g \circ (B + \text{id}).$$

Claro que esta igualdade permanece verdadeira se substituirmos g pela identidade. Também é fácil ver que $g - \text{id} \in C^0(E)$. De fato:

$$\|g - \text{id}\| = \|v \circ (\text{id} + u) + u\| \leq \|u\| + \|v\| < \infty.$$

Portanto, pela unicidade no argumento anterior, devemos ter $g = \text{id}$. Analogamente se prova que $(\text{id} + u) \circ (\text{id} + v) = \text{id}$. Isto implica que $h = \text{id} + v$ é um homeomorfismo, conforme afirmamos. Portanto, a demonstração do Teorema 9.13 está completa. \square

O exemplo a seguir mostra que se omitirmos a condição de que h esteja a distância finita da identidade, ou seja, a condição (2) do Teorema 9.13, então pode existir um número infinito de conjugações:

Exemplo 9.15. Considere o isomorfismo linear hiperbólico $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = 2x$. Considere o conjunto

$$D = (-2, -1] \cup [1, 2).$$

É imediato que para todo $x \neq 0$ existe um único valor de $n(x) \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{n(x)}(x) \in D$. Por esta razão, D é chamado *domínio fundamental* de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considere qualquer homeomorfismo

$$h_0 : [-2, -1] \cup [1, 2] \rightarrow [-2, -1] \cup [1, 2]$$

que fixa cada um dos pontos do bordo de D . Então defina

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad h(x) = \begin{cases} f^{-n(x)} \circ h_0 \circ f^{n(x)}(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Deixamos ao cuidado do leitor (Exercício 9.12) verificar que h é um homeomorfismo de \mathbb{R} e que ele conjuga f a si mesmo:

$$h \circ f = f \circ h.$$

Como temos infinitas escolhas para h_0 , desta forma obtemos infinitas conjugações de f a si mesmo. No entanto, só uma destas conjugações está a distância finita da identidade, a saber $h = \text{id}$ (correspondente a $h_0 = \text{id}$).

9.3.3 Conclusão da demonstração

Considere a translação $T : E \rightarrow E$ definida por $T(x) = x + p$. Sejam $\tilde{\mathcal{U}} = T^{-1}(\mathcal{U})$ e $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow E$ dado por $\tilde{F} = F \circ T$. É imediato que

$$\tilde{F}(0) = F(p) \quad \text{e} \quad D\tilde{F}(0) = DF(p)$$

e, portanto, a origem é um ponto estacionário hiperbólico. Além disso, a transformação T conjuga os fluxos de F e \tilde{F} . Isto mostra que não é restrição supor que $p = 0$. Faremos isso no que segue.

Seja $B = e^{DF(0)}$. Fixe $\epsilon > 0$ satisfazendo (9.11), de tal forma que vale o Teorema 9.13, e tome $\delta > 0$ tal que

$$e^{2\|A\|+1}\delta < \epsilon.$$

Seja G um campo de vetores como no Lema 9.10. Como G coincide com F em uma vizinhança de $p = 0$, basta mostrar que o fluxo $(g^t)_t$ de G é conjugado ao fluxo $(e^{At})_t$ do campo de vetores linear $A = DF(0) = DG(0)$. De acordo com o Corolário 9.11, a diferença $\psi_1 = g^1 - B$ é ϵ -lipschitziana. Logo, pelo Teorema 9.13, existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow E$ tal que

$$B \circ h = h \circ g^1 \quad \text{e} \quad \|h - \text{id}\|_0 < \infty. \quad (9.18)$$

Seja $H : E \rightarrow E$ a aplicação definida por

$$H(x) = \int_0^1 e^{-sA} \circ h \circ g^s ds.$$

É claro que H é contínua. Afirmamos que

$$e^{tA} \circ H = H \circ g^t \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (9.19)$$

Para provar este fato, observe que

$$\begin{aligned} e^{-tA} \circ H \circ g^t &= e^{-tA} \circ \left(\int_0^1 e^{-sA} \circ h \circ g^s ds \right) \circ g^t = \int_0^1 e^{-(s+t)A} \circ h \circ g^{s+t} ds \\ &= \int_t^{t+1} e^{-sA} \circ h \circ g^s ds. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Agora observe que a relação (9.18) significa que a aplicação $s \mapsto e^{-sA} \circ h \circ g^s$ é periódica de período 1:

$$e^{-(s+1)A} \circ h \circ g^{s+1} = e^{-sA} \circ B \circ h \circ g^1 \circ g^s = e^{-sA} \circ h \circ g^s$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Para uma função periódica de período τ , a sua integral sobre um intervalo de comprimento τ não depende da escolha do intervalo (Exercício ??). Portanto, a relação (9.20) dá que

$$e^{-tA} \circ H \circ g^t = \int_0^1 e^{-sA} \circ h \circ g^s ds = H, \quad (9.21)$$

como queríamos provar.

Em seguida, afirmamos que H está a distância finita da identidade, ou seja, $\|H - \text{id}\|_0 < \infty$. De fato, por construção, $h = \text{id} + v$ com $\|v\|_0 < \infty$ e, de acordo com o Corolário 9.11,

$$g^s = e^{sA} + \psi_s \text{ com } \|\psi_s\|_0 \leq M \text{ para todo } s \in [0, 1].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|H - \text{id}\|_0 &\leq \int_0^1 \|e^{-sA} \circ (\text{id} + v) \circ (e^{sA} + \psi_s) - \text{id}\|_0 ds \\ &\leq \int_0^1 \|e^{-sA} \circ v \circ e^{sA} + e^{-sA} \circ \psi_s\|_0 ds. \end{aligned}$$

A função integranda está majorada por

$$e^{s\|A\|} \|v\|_0 + e^{s\|A\|} \|\psi_s\|_0 \leq e^{\|A\|} (\|v\|_0 + M).$$

Portanto, $\|H - \text{id}\|_0 \leq e^{\|A\|} (\|v\|_0 + M) < \infty$, tal como foi afirmado.

Para $t = 1$, a relação (9.21) significa que H conjuga g^1 e $B = e^A$. Como existe uma única conjugação a distância finita da identidade (Teorema 9.13), segue que $H = h$. Em particular, H é um homeomorfismo.

A esta altura a prova do Teorema 9.7 está completa.

9.4 Teorema de Grobman–Hartman para difeomorfismos

As ferramentas que desenvolvemos também permitem demonstrar a seguinte versão do Teorema de Grobman–Hartman para sistemas com tempo discreto:

Teorema 9.16 (Teorema de Grobman–Hartman para difeomorfismos). *Seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de classe C^1 . Então existem vizinhanças \mathcal{V} de p e \mathcal{W} da origem e existe um homeomorfismo $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ que envia p em 0 e conjuga f restrito a \mathcal{V} ao isomorfismo linear $B = Df(p)$ restrito a \mathcal{W} .*

A demonstração deste teorema está baseada em alguns dos ingredientes apresentados anteriormente. Mais uma vez, o primeiro passo é globalizar a dinâmica:

Lema 9.17. *Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow E$ um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$, definido em um aberto \mathcal{U} que contém a origem de E . Suponha que $f(0) = 0$ e denote $B = Df(0)$. Então, dado qualquer $\delta > 0$, existem $r > 0$ e um difeomorfismo $g : E \rightarrow E$ de classe C^k tal que*

1. $g \equiv f$ em $B_r(0)$ e $g \equiv B$ em $E \setminus B_{2r}(0)$ e $\|g(x) - B\| \leq \delta$ para todo $x \in E$.
2. $\|D(g - B)\| \leq \delta$ e portanto a diferença $g - B$ é δ -lipschitziana.

Demonstração. O argumento é inteiramente análogo ao do Lema 9.10. Escreva $f(x) = Bx + \phi(x)$ para $x \in \mathcal{U}$. Note que $\phi(0) = 0$ e $D\phi(0) = 0$. Fixe uma função diferenciável $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\alpha(x) = 1$ para $x \leq 1$ e $\alpha(x) = 0$ para $x \geq 2$. Seja $C = \max |D\alpha|$. Note que $C \geq 1$. Considere $r > 0$ suficientemente pequeno para que a bola $B_{2r}(0)$ esteja contida em \mathcal{U} e

$$\|D\phi(x)\| \leq \frac{\delta}{4C} \text{ para todo } x \in B_{2r}(0). \quad (9.22)$$

Então defina

$$g : E \rightarrow E, \quad g(x) = Bx + \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x).$$

É claro que g é de classe C^k se f é de classe C^k . A propriedade (1) no enunciado segue imediatamente da definição de g . Para provar a propriedade (2) basta mostrar que $\|D(g - B)(x)\| \leq \delta$ para todo $x \in E$. Dividimos a prova deste fato em três casos. Se $\|x\| < r$ então

$$(g - B)(y) = \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\phi(y) = \phi(y)$$

para todo y próximo de x . Portanto, $D(g - B)(x) = D\phi(x)$. Agora basta atentar para (9.22) para concluir que a derivada é majorada por $\delta/4C < \delta$ neste caso. Se $\|x\| > 2r$ então

$$(g - B)(y) = \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\phi(y) = 0$$

para todo y próximo de x . Portanto, $D(g - B)(x) = 0$ neste caso. Resta tratar o caso $r \leq \|x\| \leq 2r$. A escolha de r em (9.22) dá que $\|D\phi\| \leq \delta/4C$ e, pelo Teorema do Valor Médio, isto também implica que

$$\|\phi(x)\| = \|\phi(x) - \phi(0)\| \leq \frac{\delta}{4C}\|x - 0\| \leq \frac{\delta r}{2C}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D(g - B)(x) &= \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)D\phi(x) + D\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\frac{D\|x\|}{r}\phi(x) \\ &\leq \frac{\delta}{4C} + \frac{C}{r}\frac{\delta r}{2C} \leq \delta. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Isto completa a demonstração de (2). Usando o Corolário 9.12, segue que g é um difeomorfismo. \square

Agora é fácil deduzir o Teorema 9.16. Primeiramente, a menos de conjugar f com uma translação, podemos supor que o ponto fixo p está localizado na origem. Seja $B = Df(0)$ e fixe $\epsilon > 0$ como no Teorema 9.13. Tome $\delta = \epsilon$ e considere r e g como no Lema 9.17. Pelo lema, existe um único homeomorfismo $h : E \rightarrow E$ a distância finita da identidade e satisfazendo

$$h \circ g = B \circ h.$$

Tome $\mathcal{V} = B_r(0)$ e $\mathcal{W} = h(B_r(0))$. Como g coincide com f em \mathcal{V} , segue que a restrição de $h|_{\mathcal{V}}$ conjuga $f|_{\mathcal{V}}$ a $B|_{\mathcal{W}}$. Isto termina a demonstração do Teorema 9.16.

Observação 9.18. As conjugações no Teorema 9.7 e no Teorema 9.16 estão longe de ser únicas. De fato, além do ponto levantado no Exemplo 9.15, ainda temos que a construção da conjugação depende das várias escolhas feitas ao globalizar a dinâmica, ou seja, na definição do campo de vetores G e da aplicação g , respectivamente.

9.5 Conjugação diferenciável

Pode mostrar-se (Exercício 9.17) que a conjugação h no Teorema de Grobman–Hartman é *hölderiana*, ou seja, que existem constantes $\theta \in (0, 1]$ e $C \geq 1$ tais que

$$C^{-1}\|x - y\|^{1/\theta} \leq \|h(x) - h(y)\| \leq C\|x - y\|^\theta \text{ para quaisquer } x, y.$$

No entanto, em geral a constante θ não pode ser tomada igual a 1 e, portanto, h não é diferenciável e nem sequer lipschitziana. Nesta seção vamos discutir esta questão de forma sucinta. Informações adicionais e referências serão dadas nas Notas deste capítulo. Focaremos a discussão em pontos fixos de difeomorfismos, mas valem considerações análogas para pontos estacionários de fluxos.

Inicialmente, consideremos difeomorfismos $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ onde $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ são vizinhanças da origem. Suponhamos que $f(0) = 0$ e seja $b = Df(0)$. Note que o ponto fixo 0 é hiperbólico se e somente se $|b| \neq 1$. No que segue suporemos que $|b| < 1$: o caso $|b| > 1$ pode ser reduzido a este, substituindo f por sua inversa f^{-1} .

É claro que podemos escrever

$$f(x) = bx(1 + \phi(x)) \quad (9.24)$$

onde ϕ é uma função contínua com $\phi(0) = 0$. Aliás, dado qualquer $k \geq 1$, se f é de classe C^k então ϕ é de classe C^{k-1} . Fixe $a \in (|b|, 1)$. Então, $|f'(x)| \leq a$ e $|f(x)| \leq a|x| < |x|$ para todo x numa vizinhança da origem. Em particular, a trajetória de x converge exponencialmente para zero:

$$|f^j(x)| \leq a^j|x| \text{ para todo } j \geq 0. \quad (9.25)$$

Suponhamos que existe um difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ de classe C^1 entre vizinhanças $U \subset \mathcal{U}$ e $V \subset \mathcal{V}$ da origem e que conjuga f à sua derivada:

$$h(f(x)) = bh(x) \text{ para todo } x \in U \cap f^{-1}(U). \quad (9.26)$$

Então $h(0) = 0$ e a função $u(x) = h(x)/x$ se estende continuamente à origem, com $u(0) = Df(0)$. Aliás, u é de classe C^{l-1} sempre que h é de classe C^l , qualquer que seja $l \geq 1$. Substituindo as expressões de $f(x)$ e $h(x)$ em (9.26), obtemos que

$$bx(1 + \phi(x))u(f(x)) = h(f(x)) = bh(x) = bxu(x)$$

e, portanto, $u(x) = (1 + \phi(x))u(f(x))$. Então, por recorrência,

$$u(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi(f^j(x)))u(f^n(x)) \text{ para todo } n \geq 1.$$

Vamos passar ao limite quando $n \rightarrow \infty$. A relação (9.25) dá que $f^n(x) \rightarrow 0$ e, portanto, $u(f^n(x)) \rightarrow u(0)$. Além disso, os dois limites são uniformes numa vizinhança da origem.

Desta forma vemos que, se existe realmente uma conjugação h de classe C^1 , então o produto infinito

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + \phi(f^j(x))) = \lim_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi(f^j(x))) \quad (9.27)$$

converge uniformemente numa vizinhança da origem e a função $u(x) = h(x)/x$ satisfaz

$$u(x) = u(0) \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \phi(f^j(x))).$$

Em particular, a conjugação h é única a menos da escolha de $u(0) = Dh(0)$.

Exemplo 9.19. Considere $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ definida por $f(x) = bx(1 + 1/\log|x|)$. Neste caso, (9.27) corresponde a

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\log|f^j(x)|}\right). \quad (9.28)$$

Pode verificar-se que $\log|f^j(x)| \approx j \log b$ (veja o Exercício 9.15). Então a série

$$\sum_j \frac{1}{\log|f^j(x)|} \approx \frac{1}{\log b} \sum_j \frac{1}{j}$$

é divergente e, portanto, o produto infinito (9.28) também é divergente. Logo, neste caso não pode existir conjugação C^1 .

No exemplo que acabamos de dar, a transformação f é apenas de classe C^1 . Para difeomorfismos mais diferenciáveis em dimensão 1 temos uma conclusão mais positiva (veja também o Exercício 9.14):

Proposição 9.20. *Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 2$, entre vizinhanças da origem. Suponha que $f(0) = 0$ e a derivada $b = Df(0)$ satisfaz $|b| \neq 1$. Então existe um difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ de classe C^{k-1} entre vizinhanças da origem, satisfazendo $h(f(x)) = bh(x)$ para todo $x \in U \cap f^{-1}(U)$.*

Demonstração. Mais uma vez, suporemos que $|b| < 1$: o caso $|b| > 1$ é análogo, substituindo f por sua inversa. O ponto principal é que a hipótese de que f é de classe C^2 garante que a função ϕ em (9.24) é de classe C^1 . Seja C um majorante qualquer de $|D\phi|$ próximo da origem. Então,

$$|\phi(f^j(x))| \leq C|f^j(x)| \leq Cb^j|x| \text{ para todo } j \geq 0$$

e todo ponto x numa vizinhança da origem. Segue que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \phi(f^j(x))$ converge uniformemente, e portanto o produto infinito (9.28) também converge uniformemente numa vizinhança da origem.

Defina $h(x) = xu(x)$, onde

$$u(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \phi(f^j(x))).$$

Então u é uma função contínua e $u(0) = 1$. Afirmamos que a função u é de classe C^1 . Para provar este fato, considere a sequência das derivadas

$$D \prod_{j=0}^{n-1} [1 + \phi(f^j(x))] = \prod_{j=0}^{n-1} [1 + \phi(f^j(x))] \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D\phi(f^j(x))Df^j(x)}{1 + \phi(f^j(x))}. \quad (9.29)$$

Já vimos que o produto converge uniformemente e é fácil verificar que o mesmo vale para a soma, uma vez que

$$\left| \frac{D\phi(f^j(x))Df^j(x)}{1 + \phi(f^j(x))} \right| \leq \frac{C|Df^j(x)|}{1 - |\phi(f^j(x))|} \leq \frac{Cb^j}{1 - 1/2} = 2Cb^j \text{ para todo } j \geq 0$$

e todo x numa vizinhança da origem. Portanto, (9.29) converge uniformemente. Isto assegura que u é de classe C^1 , tal como afirmamos.

Defina $h(x) = xu(x)$. Então h é uma aplicação de classe C^1 e $Dh(0) = u(0) = 1$. Pelo Teorema da Função Inversa, isso implica que h é um difeomorfismo de classe C^1 numa vizinhança da origem. Além disso,

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= f(x)u(f(x)) = bx(1 + \phi(x)) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \phi(f^j(x))) \\ &= bx \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \phi(f^j(x))) = bxu(x) = bh(x) \end{aligned}$$

para todo x no domínio de definição. Isto prova o caso $k = 2$ da proposição. Deixamos o restante do argumento a cargo do leitor (Exercício 9.14). \square

Para pontos fixos de difeomorfismos em dimensão superior, a situação é mais complicada. Hartman mostrou que em dimensão 2 a conjugação sempre pode ser escolhida de classe C^1 . Mas o exemplo a seguir mostra que ela não é de classe C^2 , em geral, mesmo que a transformação f seja de classe C^∞ ou mesmo analítica:

Exemplo 9.21. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (a^2x + y^2, ay)$ com $0 < a < 1$. Note que a origem $(0, 0)$ é um ponto fixo e a derivada $B = Df(0, 0)$ está dada por $B(x, y) = (a^2x, ay)$. Suponha que existe um difeomorfismo h de classe C^2 tal que

$$h(f(x, y)) = Bh(x, y) \text{ para todo } (x, y) \text{ numa vizinhança da origem.}$$

Escreva $h(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$. Então

$$\xi(a^2x + y^2, ay) = a^2\xi(x, y) \text{ e } \eta(a^2x + y^2, ay) = a\eta(x, y).$$

Derivando a primeira igualdade com respeito a y , obtemos que

$$2y\partial_x\xi(a^2x + y^2, ay) + a\partial_y\xi(a^2x + y^2, ay) = a^2\partial_y\xi(x, y)$$

e, derivando uma vez mais com respeito a y , vem que

$$2\partial_x\xi(a^2x + y^2, ay) + 4y^2\partial_{xx}^2\xi(a^2x + y^2, ay) + 2ay\partial_{xy}\xi(a^2x + y^2, ay) + a^2\partial_{yy}^2\xi(a^2x + y^2, ay) = a^2\partial_{yy}^2\xi(x, y).$$

Substituindo $x = y = 0$ nestas duas igualdades, obtemos que $\partial_y\xi(0, 0) = 0$ e $\partial_x\xi(0, 0) = 0$, respectivamente. Isto contradiz a hipótese de que h é um difeomorfismo.

Hartman também mostrou que, em qualquer dimensão, a conjugação pode ser tomada de classe C^1 sempre que a derivada B é um atrator (todos os valores característicos com módulo menor que 1) ou um repulsor (todos os valores característicos com módulo maior que 1). O exemplo a seguir mostra que isso não é verdade, em geral, para outros tipos de aplicações lineares em dimensão maior ou igual que 3:

Exemplo 9.22. Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (ax, acy + xz, cz) \text{ com } 0 < a < 1 < c < a^{-1}.$$

A derivada $B = Df(0, 0, 0)$ está dada por $B(x, y, z) = (ax, acy, cz)$. Suponha que existe um difeomorfismo h de classe C^1 entre duas vizinhanças da origem, tal que $h(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ e

$$h(B(x, y, z)) = f(h(x, y, z)) \text{ para todo } (x, y, z) \text{ próximo da origem.} \quad (9.30)$$

Vamos mostrar que isto conduz a uma contradição. Para isso, escreva

$$h(x, y, z) = (\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)).$$

Substituindo em (9.30) obtemos que

$$\begin{cases} \xi(ax, acy, cz) = a\xi(x, y, z) \\ \eta(ax, acy, cz) = ac\eta(x, y, z) + \xi(x, y, z)\zeta(x, y, z) \\ \zeta(ax, acy, cz) = c\zeta(x, y, z) \end{cases} \text{ para todo } (x, y, z). \quad (9.31)$$

Derivando (9.30) e tomando $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, obtemos que $Dh(0, 0, 0) \circ B = B \circ Dh(0, 0, 0)$. Isto implica que $Dh(0)$ envia autovetores de B em autovetores de B , preservando autovalores. Como B é diagonal e os seus autovalores são todos distintos, isto significa que $Dh(0, 0, 0)$ é necessariamente diagonal:

$$Dh(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_x\xi(0, 0, 0) & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y\eta(0, 0, 0) & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z\zeta(0, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

(no Exercício 9.23 propomos outra demonstração deste fato, que dá um pouco mais de informação).

Fixemos $y = 0$ a partir daqui. Como $Dh(0, 0, 0)$ é um isomorfismo, a derivada na origem da aplicação $(x, z) \mapsto (\xi(x, 0, z), \zeta(x, 0, z))$ também é um isomorfismo. Portanto, esta última aplicação é um difeomorfismo local na vizinhança da origem. Seja $(\xi, \eta) \mapsto (x(\xi, \zeta), z(\xi, \zeta))$ a inversa e defina

$$H(\xi, \zeta) = \eta(x(\xi, \zeta), 0, z(\xi, \zeta)).$$

As relações (9.31) traduzem-se para

$$\begin{cases} x(a\xi, c\zeta) = ax(\xi, \zeta) \\ H(a\xi, c\zeta) = acH(\xi, \zeta) + \xi\zeta \\ z(a\xi, c\zeta) = cz(\xi, \zeta) \end{cases} \quad \text{para todo } (\xi, \zeta). \quad (9.32)$$

A igualdade do meio implica que

$$a^{-n}(ac)^j H(a^{n-j}\xi, c^{-j}\zeta) = a^{-n}(ac)^{j+1} H(a^{n-j-1}\xi, c^{-j-1}\zeta) + (ac)^{-1}\xi\eta$$

para todo $j = 0, \dots, n-1$ e, conseqüentemente,

$$a^{-n}H(a^n\xi, \zeta) = c^n H(\xi, c^{-n}\zeta) + n(ac)^{-1}\xi\zeta \quad \text{para todo } (\xi, \zeta). \quad (9.33)$$

Em particular,

$$H(\xi, 0) = (ac)^{-n}H(a^n\xi, 0) \text{ e } H(0, \zeta) = (ac)^n H(0, c^{-n}\zeta) \text{ para todo } n \geq 0 \text{ e todo } (\xi, \zeta).$$

Passando ao limite em n , e notando que H é lipschitziana, concluímos que

$$H(\xi, 0) = 0 \text{ e } H(0, \zeta) = 0 \text{ para todo } (\xi, \zeta).$$

Então, usando mais uma vez o fato de que H é lipschitziana, vemos que as expressões

$$\begin{aligned} a^{-n}|H(a^n\xi, \zeta)| &= a^{-n}|H(a^n\xi, \zeta) - H(0, \zeta)| \leq \text{constante } |\xi| \text{ e} \\ c^n|H(\xi, c^{-n}\zeta)| &= c^n|H(\xi, c^{-n}\zeta) - H(\xi, 0)| \leq \text{constante } |\zeta| \end{aligned}$$

são uniformemente limitadas na vizinhança da origem. Mas, fazendo $n \rightarrow \infty$, isto é incompatível com (9.33) sempre que $\xi\zeta \neq 0$. Esta contradição prova que não existe conjugação h de classe C^1 .

Estes dois últimos exemplos também mostram que, em dimensão maior que 1, a diferenciabilidade da conjugação tem pouco que ver com a diferenciabilidade da transformação. De fato, ela está mais ligada às propriedades aritméticas dos valores característicos da derivada, como mostra o seguinte teorema de Sternberg:

Teorema 9.23. *Existe uma função $\kappa = \kappa(n, \lambda_1, \dots, \lambda_d) \geq 0$ tal que o seguinte vale para qualquer inteiro $n \geq 1$.*

Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo entre vizinhanças da origem com $f(0) = 0$. Suponha que f é de classe $C^{n+\kappa}$, a derivada $B = Df(0)$ é um isomorfismo hiperbólico e os seus valores característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ satisfazem

$$\lambda_i \neq \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_d^{m_d} \quad (9.34)$$

para $i = 1, \dots, n$ e quaisquer inteiros $m_1, \dots, m_d \geq 0$ com $2 \leq \sum_{i=1}^d m_i \leq n + \kappa$. Então existe um difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ de classe C^n entre vizinhanças da origem tal que

$$h(f(x)) = Bh(x) \text{ para todo } x \in U \cap f^{-1}(U).$$

Se f é de classe C^∞ e (9.34) vale para $i = 1, \dots, n$ e quaisquer inteiros $m_1, \dots, m_d \geq 0$ com $\sum_{i=1}^d m_i \geq 2$ então o difeomorfismo $h : U \rightarrow V$ pode ser tomado de classe C^∞ .

A demonstração deste teorema não será apresentada aqui. Mas o primeiro passo está esboçado no Exercício 9.20, para ilustrar o papel da *condição de não ressonância* (9.34) na demonstração. Existe uma versão do Teorema 9.23 para equações diferenciais, em que a condição de não ressonância toma a forma

$$\lambda_i \neq m_1 \lambda_1 + \dots + m_d \lambda_d, \quad (9.35)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ são os valores característicos da derivada $A = DF(0)$ do campo de vetores. No Exercício 9.21 convidamos o leitor a enunciar precisamente e provar esse enunciado.

9.6 Experimento: sistemas planetários

Historicamente, o problema de descrever o movimento de corpos sujeitos a atração gravitacional mútua teve um papel fundamental na construção da teoria das equações diferenciais. Consideremos um sistema formado por $N \geq 2$ corpos distintos, com massas $m_1, \dots, m_N > 0$. Suponhamos que esses corpos são pontuais (um argumento de Newton mostra que essa aproximação é razoável, pelo menos quando os corpos são esféricos e homogêneos) e representemos por $x_1(t), \dots, x_N(t) \in \mathbb{R}^3$ as suas posições em cada instante t .

De acordo com a Lei da Gravitação de Newton, cada corpo i exerce sobre um corpo j uma força atrativa, com a direção e o sentido de

$$\frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|}$$

e cuja norma é diretamente proporcional ao produto $m_i m_j$ das massas e inversamente proporcional ao quadrado $\|x_i(t) - x_j(t)\|^2$ da distância entre os dois corpos. A constante de proporcionalidade é representada por G e é chamada *constante gravitacional*. O seu valor empírico é $G \approx 6,674408 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Combinando esta lei com a 2ª lei de Newton (força igual a massa vezes aceleração), obtemos que

$$m_j x_j'' = \sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j}{\|x_i(t) - x_j(t)\|^2} \frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|},$$

ou seja,

$$x_j'' = \sum_{i \neq j} G m_i \frac{x_i(t) - x_j(t)}{\|x_i(t) - x_j(t)\|^3} \text{ para cada } j = 1, \dots, N. \quad (9.36)$$

Observe que se trata de uma equação de ordem 2 e dimensão $3N$, já que cada x_j toma valores em \mathbb{R}^3 .

Esta equação satisfaz certas *leis de conservação*: tanto a energia total

$$E_{cin} + E_{pot} = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{2} m_i \|x_i'(t)\|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} G \frac{m_i m_j}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} \quad (9.37)$$

quanto o momento linear e o momento angular,

$$p = \sum_{i=1}^N m_i x_i'(t) \quad \text{e} \quad L = \sum_{i=1}^N m_i x_i(t) \times x_i'(t), \quad (9.38)$$

(\times representa o produto vetorial, ou produto exterior) permanecem constantes ao longo do tempo (Exercício 9.24). Desta forma, obtemos sete integrais primeiras da equação diferencial: a energia, as três componentes do momento linear e as três componentes do momento angular.

Utilizando esse fato podemos obter uma resolução analítica completa de (9.36) no caso $N = 2$. No entanto, isso não é mais possível quando $N \geq 3$. Nesse caso, devemos necessariamente apelar para a integração numérica da equação, combinada com a sua análise qualitativa.

Objetivos:

1. Escreva um integrador para a equação (9.36) em código do MATLAB/Octave ou outro ambiente computacional, utilizando o método RKF45.
2. Explore diferentes configurações de três corpos em busca de órbitas interessantes. Para simplificar, suponha que as unidades físicas foram escolhidas de tal modo que $G = 1$.
3. Teste, para diferentes condições iniciais e diferentes massas, se os três corpos permanecem para sempre a distância limitada uns dos outros ou se algum deles é “ejetado para infinito”.
4. Utilize a observação sobre leis de conservação (energia, momento linear e momento angular são constantes ao longo das soluções exatas) para conferir até que ponto as soluções calculadas são corretas.
5. Repita os passos 2 a 4 para outros sistemas, com diferentes números N de corpos. Represente os resultados graficamente (veja Figura 9.3. Melhor ainda, faça animações dos sistemas estudados).
6. Use o seu integrador numérico para simular o sistema Sol-Terra-Lua, cujas massas são

$$m_{Sol} = 1,988 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad m_{Terra} = 5,973 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad m_{Lua} = 7,347 \times 10^{22} \text{ kg}.$$

Busque dados sobre as órbitas relativas destes corpos e utilize esta informação para definir configurações iniciais para este sistema.

Este último objetivo é bastante delicado do ponto de vista numérico, pois as ordens de grandeza, das massas e das distâncias, são extremamente variadas. Reflita previamente sobre como escolher os parâmetros de resolução do seu método, como tolerância e passos mínimo e máximo.

Figura 9.3: Evolução de um sistema de três planetas.

O fato de que o momento linear é constante, significa que o centro de massa

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^N m_i} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

do sistema se move com velocidade constante. No caso considerado acima, como a massa do Sol é tão maior do que a as massas da Terra e da Lua, o centro de massa praticamente coincide com a posição x_{Sol} do Sol. Portanto, a velocidade x'_{Sol} do Sol é praticamente constante. Então, escolhendo um sistema móvel de coordenadas com origem localizada no Sol, podemos supor que $x_{Sol}(t) \equiv 0$.

Outra simplificação possível dos cálculos acima é que, na realidade, o movimento dos três corpos é praticamente planar: o plano que os contém, que é chamado *plano da eclíptica*, permanece quase constante ao longo do tempo. Portanto, a menos de escolhermos um sistema de coordenadas adequado, podemos considerar que x_{Terra} e x_{Lua} tomam valores no plano \mathbb{R}^2 .

9.7 Exercícios

Exercício 9.1. Sejam $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $F = \nabla f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ o respectivo campo gradiente. Um ponto $p \in \mathcal{U}$ é ponto estacionário de F se e somente se $Df(p) = 0$. Verifique que nesse caso os valores característicos de $DF(p)$ são todos reais. Além disso, o ponto estacionário é hiperbólico se e somente se a forma bilinear $D^2f(p)$ é não degenerada.

Exercício 9.2. Enuncie e prove versões das Proposições 9.1 e 9.3 para pontos fixos de difeomorfismos.

Exercício 9.3. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo de vetores C^1 e seja $p \in U$ tal que toda vizinhança de p contém uma trajetória periódica de F . Conclua que p é um ponto estacionário não hiperbólico.

[Observação: Compare com o Exercício 5.13.]

Exercício 9.4. Verifique as afirmações feitas no Exemplo 9.9.

Exercício 9.5. Verifique igualmente que a trajetória $\gamma(t)$ de F no Exemplo 9.9 passando pelo ponto $(3/2, 0)$ satisfaz $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = (0, 0)$. Dizemos que se trata de uma *trajetória homoclínica* (ou *biassintótica*) do ponto estacionário $p = (0, 0)$. O fluxo de F é conjugado a um fluxo linear na vizinhança do ponto estacionário $q = (1, 0)$?

Exercício 9.6. Sejam F e G campos de vetores de classe C^1 definidos em vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^d$ e tais $F(0) = 0 = G(0)$. Suponha que os fluxos φ^t e ψ^t das equações diferenciais $x' = F(x)$ e $x' = G(x)$ são conjugados por um difeomorfismo h de classe C^1 tal que $h(0) = 0$.

1. Mostre que as aplicações lineares $D\varphi^t(0)$ e $D\psi^t(0)$ são conjugadas: existe um isomorfismo linear B tal que $B \cdot D\varphi^t(0) = D\psi^t(0) \cdot B$ para todo t .
2. Deduza que as aplicações lineares $DF(0)$ e $DG(0)$ também são conjugadas.

Exercício 9.7. No contexto do Lemma 9.10, mostre que $\|D^j(G - A)\| < \delta$ para todo $j = 1, \dots, k$, desde que $r > 0$ seja suficientemente pequeno. Analogamente, no contexto do Lemma 9.17, mostre que $\|D^j(g - B)\| < \delta$ para todo $j = 1, \dots, k$, desde que $r > 0$ seja suficientemente pequeno.

Exercício 9.8. Suponha que $B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um isomorfismo hiperbólico. Mostre que existe $\lambda < 1$ e uma norma $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^d tal que

1. $\|B(v_s)\| \leq \lambda \|v_s\|$ para todo $v_s \in E^s$;
2. $\|B(v_u)\| \geq \lambda^{-1} \|v_u\|$ para todo $v_u \in E^u$;
3. $\|v_s + v_u\| = \max\{\|v_s\|, \|v_u\|\}$ para quaisquer $v_s \in E^s$ e $v_u \in E^u$.

Exercício 9.9. Sejam $B : E \rightarrow E$ um isomorfismo linear num espaço de Banach e $\psi : E \rightarrow E$ uma aplicação lipschitziana, com constante de Lipschitz ϵ . Mostre que se $\epsilon \|B^{-1}\| < 1$ então $B + \psi : E \rightarrow E$ é um homeomorfismo e a sua inversa é lipschitziana, com constante de Lipschitz

$$\frac{\|B^{-1}\|}{1 - \epsilon \|B^{-1}\|}.$$

Exercício 9.10. Seja $B : E \rightarrow E$ um isomorfismo linear num espaço de Banach. Se $\psi : E \rightarrow E$ é uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$ com $\|D\psi(x)\| \leq \epsilon$ para todo $x \in E$ então $B + \psi : E \rightarrow E$ é um difeomorfismo de classe C^k .

Exercício 9.11. Verifique que $C^0(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Banach, ou seja, que a função definida em (9.12) é uma norma completa.

Exercício 9.12. Verifique as afirmações no Exemplo 9.15.

Exercício 9.13. Mostre que todo campo de vetores linear hiperbólico $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é estruturalmente estável no espaço de todos os campos de vetores $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 , no seguinte sentido: existe $\delta > 0$ tal que se F satisfaz

$$\|F(x) - Ax\| < \delta \quad \text{e} \quad \|DF(x) - A\| < \delta \quad \text{para todo } x \in B_2(0),$$

existe um homeomorfismo $H : B_1(0) \rightarrow H(B_1(0))$ que conjuga o fluxo de $A|_{B_1(0)}$ ao fluxo de $F|_{H(B_1(0))}$.

Exercício 9.14. Complete a demonstração da Proposição 9.20. Mostre que, em geral, a conjugação não é de classe C^k .

Exercício 9.15. No contexto do Exemplo 9.19, mostre que

$$\lim_j \frac{1}{j} \log |f^j(x)| = \log b \quad \text{para todo } x \text{ numa vizinhança da origem.}$$

Exercício 9.16. Mostre que se γ é uma trajetória periódica hiperbólica de um fluxo então ela é isolada: existe uma vizinhança \mathcal{V} de γ tal que γ é a única trajetória periódica contida em \mathcal{V} .

Exercício 9.17. Mostre que a conjugação h construída na Seção 9.3 sempre é hölderiana. Justifique, por meio de exemplo, que ela pode não ser lipschitziana.

[Dica: Comece por verificar que existe $\delta > 0$ tal que $\max\{\|B^n x - B^n y\| : n \geq 0\} > \delta$ para quaisquer pontos $x \neq y$. Em seguida, use o fato de que $\|Df\|$ e $\|B\|$ são limitadas e h está a distância finita da identidade.]

Exercício 9.18. Sejam F e G dois campos de vetores de classe C^1 definidos numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^d$ tais que $F(0) = 0 = G(0)$ e as derivadas $DF(0)$ e $DG(0)$ são atratores hiperbólicos. Mostre que existe um homeomorfismo na vizinhança da origem que conjuga a transformação tempo-1 do fluxo de F à transformação tempo-1 do fluxo de G mas não envia trajetórias de F em trajetórias de G .

Exercício 9.19 (C). Considere uma turbina submetida a um fluxo constante de água numa usina hidrelétrica e represente por e a energia gerada e por v a velocidade da turbina. A evolução destas grandezas pode ser modelada pela equação diferencial

$$e' = -\alpha e + ev \quad v' = 1 - \beta v - e^2,$$

onde α e β são constantes positivas. Investigue, tanto qualitativa quanto numericamente, o comportamento das soluções.

Exercício 9.20. Mostre que dado $n \geq 1$ existe $N > n$ tal que se $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um difeomorfismo de classe C^N com $f(0) = 0$ e tal que os valores característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ da derivada $A = Df(0)$ satisfazem (9.34) para quaisquer $m_1, \dots, m_d \geq 0$ com $2 \leq \sum_{j=1}^d m_j \leq N$, então existe uma função polinomial $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $p(0) = 0$, $Dp(0) = \text{id}$ e

$$D^j(p \circ f \circ p^{-1})(0) = 0 \quad \text{para } j = 2, \dots, n.$$

Exercício 9.21. Demonstre a versão do Teorema 9.23 para equações diferenciais (mencionada ao final da Seção 9.5) a partir do Teorema 9.23.

[Dica: Use as ideias da Seção 9.3.3.]

Exercício 9.22 (C). Considere a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/2 + x^2/4$. Calcule numericamente uma aplicação diferenciável $h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(f(x)) = h(x)/2$ para todo $x \in (-1, 1)$. Investigue qual é o maior valor de $a > 0$ tal que h se estende ao intervalo $(-a, a)$. Interprete a conclusão.

[Dica: Use a construção na Proposição 9.20.]

Exercício 9.23. No contexto do Exemplo 9.22, verifique que

1. $\xi(0, y, z) = 0$ e $\zeta(x, y, 0) = 0$ para todo (x, y, z) ;
2. $\eta(x, 0, 0) = 0$ e $\eta(0, 0, z) = 0$ para todo (x, y, z) ;
3. a derivada $Dh(0, 0, 0)$ é diagonal.

Exercício 9.24. Mostre que a energia (9.37) e os momentos linear e angular (9.38) permanecem constantes ao longo de toda trajetória da equação (9.36).

Exercício 9.25 (C). Considere uma equação diferencial $x'' = F(t, x, x')$ de ordem 2 sujeita a condições da seguinte forma: $x(a) = x_a$ e $x(b) = x_b$. Problemas deste tipo são denominados *problemas de fronteira* e, embora sejam mais comuns no contexto de equações diferenciais parciais, também têm importantes aplicações no âmbito das equações diferenciais ordinárias. Dentre elas, a mais famosa é o problema de correção de órbita no lançamento de projéteis: conhecendo o ponto de lançamento e o ponto de colisão desejado de um projétil, como encontramos a velocidade inicial adequada?

Podemos buscar uma solução para este tipo de problema usando o seguinte algoritmo, que é chamado *método de lançamento* (em inglês: *shooting method*):

- (a) considere o problema de valor inicial $x'' = F(t, x, x')$ com $x(a) = x_a$ e $x'(a) = v$; seja $x_v(t)$ a solução;
- (b) resolva a equação $x_v(b) - x_b = 0$, por exemplo, usando o método das bisseções, ou o método de Newton; seja \tilde{v} a solução;
- (c) tome $x = x_{\tilde{v}}$, sendo \tilde{v} a velocidade inicial necessária para que a solução do problema de valor inicial satisfaça as condições impostas pelo problema de fronteira.

Discuta a relevância dos teoremas de dependência para o método proposto; que condições F deve satisfazer? Escreva este algoritmo em código MATLAB/Octave ou outro ambiente computacional e use-o para resolver os seguintes problemas de fronteira:

1. $x'' = 2x^2$ com $x(0) = 0$ e $x(1) = 0$;
2. $x'' + 4x' + 13x = 0$ com $x(0) = 1$ e $x(1) = 0$;
3. $x'' - 2x = t(5 - t)$, com $x(0) = 0$ e $x(5) = 0$.

Exercício 9.26 (C). Calcule numericamente a função de Airy, ou seja, a única solução $Ai(t)$ da equação de Airy $x'' = tx$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Ai(t) = 0$. Represente a função graficamente.

[Dica: Adapte o método de lançamento a esta situação.]

9.8 Notas

Os Teoremas 9.7 e 9.16 foram provados por Grobman [32, 33] e Hartman [39, 40, 40], independentemente e usando métodos diferentes. O argumento que utilizamos na Seção 9.3.3 para passar de tempo discreto a tempo contínuo havia sido apontado um pouco antes por Sternberg [121].

David Matveevich Grobman (1922–1998) foi um cientista russo, de Moscou, pioneiro da ciência dos computadores na União Soviética. Philip Hartman (1915–2015) foi um matemático americano que realizou a maior parte da sua carreira na Johns Hopkins University. Entre muitos outros trabalhos, escreveu um livro de texto sobre equações diferenciais ordinárias [41] que teve, e ainda tem, muita influência na área. Shlomo Zvi Sternberg é um matemático americano, nascido em 1936 e que atualmente detém uma cátedra de professor na Universidade de Harvard. Ele é conhecido por suas muitas contribuições aos Sistemas Dinâmicos, particularmente ao problema da linearização e ao estudo das ações de grupos em variedades simpléticas.

O problema da linearização remonta à tese de Poincaré, no contexto analítico. Ele estava interessado em equações diferenciais analíticas, ou seja, nas quais o campo de vetores F é uma função analítica real ou complexa. Supondo que $F(0) = 0$, e representando por $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ os valores característicos de $A = Df(0)$, Poincaré mostrou (veja [104, páginas 99 a 105]) que se

$$(i) \quad \lambda_i \neq m_1 \lambda_1 + \dots + m_d \lambda_d \text{ para quaisquer } m_1, \dots, m_d \geq 0 \text{ com } \sum_{j=1}^d m_j \geq 2 \text{ e}$$

(ii) o conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ está contido em algum semiplano aberto de \mathbb{C} em torno da origem

então, numa vizinhança da origem, o fluxo de F é conjugado ao fluxo de A por algum difeomorfismo analítico h . A condição (i) é usada para garantir que existe alguma série formal de potências (não necessariamente convergente) que resolve o problema; então, a condição (ii) é usada para mostrar que essa série é realmente convergente e, portanto, define uma conjugação analítica h .

Um progresso muito importante foi devido ao renomado matemático alemão Carl Ludwig Siegel (1896–1981): ele provou em [115] que ainda há convergência da série se eliminarmos a condição (ii), substituindo ao mesmo tempo a condição de não ressonância (i) por uma *condição diofantina*: existem $c > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$(i') \quad |\lambda_i - (m_1 \lambda_1 + \dots + m_d \lambda_d)| \geq \frac{c}{(|m_1| + \dots + |m_d|)^\tau} \text{ para quaisquer inteiros } m_1, \dots, m_d \geq 0 \text{ com } \sum_{j=1}^d m_j \geq 2.$$

Este trabalho marca a entrada em cena do chamado *problema dos pequenos denominadores*, que está na origem de uma área importante dos Sistemas Dinâmicos, denominada Teoria de Kolmogorov–Arnold–Moser.

O estudo do problema da linearização para campos de vetores e transformações diferenciáveis foi iniciado por Sternberg [120, 121, 122]. O Exemplo 9.19 e a Proposição 9.20 são de Sternberg [120]. O Exemplo 9.21 é de Sternberg [121] e o Exemplo 9.22 é de Hartman [39]. O Teorema 9.23 e a sua versão para equações diferenciais foram demonstrados por Sternberg [122]. Eles foram melhorados por diversos autores, tais como Belitskiĭ [10], Bonckaert–Dumortier [14], Brjuno [15, 16], Chen [22], Sell [113] e Takens [128], com o intuito de obter estimativas mais precisas e explícitas para a diferenciabilidade da conjugação. Em dimensão 2, as melhores estimativas possíveis foram obtidas por Stowe [123].

Sem hipóteses de não ressonância, Belitskiĭ [9] observou que a conjugação é sempre hölderiana. Também é sabido que se f é de classe C^∞ então a conjugação é sempre diferenciável na origem; veja [36].

A Lei da Gravitação Universal foi proposta por Isaac Newton (1642–1726) em seu livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* ("Princípios matemáticos da filosofia natural"), publicado em 1687, sem dúvida uma das obras mais influentes de toda a história da Ciência. A gravitação newtoniana foi extraordinariamente bem sucedida em explicar o movimento dos diferentes corpos celestes e só viria a ser revista no século 20, com a introdução da gravitação relativística de Albert Einstein (1879–1955).

O próprio Newton resolveu as equações no caso de $N = 2$ corpos deduzindo, em particular, as três leis de Kepler a partir da equação (9.36). O estudo do caso geral $N \geq 3$ atraiu a atenção de muitos dos maiores matemáticos dos séculos 18 e 19, especialmente os franceses Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Pierre-Simon Laplace (1749–1827) e Urbain Le Verrier (1811–1877).

No caso do Sistema Solar, é possível tirar vantagem do fato de que a massa do Sol é muito maior do que as dos demais corpos no sistema. Podemos começar por ignorar as atrações mútuas entre planetas, cometas e asteróides, levando em conta apenas a atração exercida sobre eles pelo Sol. Essa é a chamada *aproximação kepleriana* do problema: com essa simplificação é possível resolver a equação da gravitação analiticamente, obtendo-se as trajetórias cônicas (elipses, parábolas e hipérbolas) previstas por Kepler.

Em seguida podemos levar em conta, sucessivamente, a atração entre Júpiter e Saturno (os dois planetas mais maciços), entre Júpiter e Urano etc, analisando como essas interações modificam as trajetórias keplerianas. Essas modificações são chamadas *variações seculares* pois são relativamente pequenas e, portanto, só se tornam perceptíveis após longos períodos de tempo. Esta abordagem do problema de resolver a equação de gravitação para o Sistema Solar foi aperfeiçoada pelo matemático e astrônomo sueco Anders Lindstedt (1854–1939) e também por Poincaré, resultando no *método de Lindstedt–Poincaré* de expansão em série assintótica.

Mas o trabalho de Poincaré também abriu o caminho para outras abordagens, mais abrangentes e poderosas, conforme comentamos nas Notas do Capítulo 5. O progresso matemático alcançado ao longo do século 20, a par do desenvolvimento dos computadores modernos e do aperfeiçoamento da teoria física propiciado pela gravitação relativística, tornou possível modelar numericamente a evolução do Sistema Solar com boa precisão ao longo de períodos da ordem de bilhões de anos. Trabalho

pioneiro nessa direção foi realizado pelo astrônomo francês Jacques Laskar a partir dos anos 1980.

DRAFT