

Capítulo 8

Estabilidade de Lyapunov

Consideremos mais uma vez a equação diferencial geral de ordem 1:

$$x' = F(t, x). \quad (8.1)$$

O fato de que as soluções dependem continuamente das condições iniciais (Teorema 3.12) assegura que soluções com condições iniciais próximas permanecem próximas por longos períodos de tempo (Exercício 3.12). No entanto, isso não quer dizer que essas soluções não possam separar-se posteriormente. Por exemplo, se A é um repulsor linear hiperbólico então toda solução da equação linear $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$ próxima da origem permanece próxima da origem por um longo período de tempo mas acaba indo para infinito, em norma, quando $t \rightarrow +\infty$.

O problema que discutiremos a seguir pode ser formulado em termos conceituais da seguinte forma: *em que condições, dada uma certa solução de (8.1), é verdade que soluções com condições iniciais próximas permanecem próximas dela para sempre no futuro?* Esta propriedade é muito importante porque ela significa que pequenas variações nas condições iniciais têm pouca importância no longo prazo. Em termos mais precisos, neste capítulo vamos estudar as seguintes noções principais (veja a Figura 8.1):

Definição 8.1. Uma solução $\gamma : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de (8.1) com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$ é *estável* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda solução máxima β com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(x_0)$ está definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e satisfaz

$$\|\beta(t) - \gamma(t)\| \leq \epsilon \text{ para todo } t \in [t_0, +\infty). \quad (8.2)$$

Dizemos que a solução γ é *assintoticamente estável* se ela é estável e $\delta > 0$ pode ser escolhido de tal modo que toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(x_0)$ satisfaz

$$\|\beta(t) - \gamma(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (8.3)$$

Dizemos que γ é *exponencialmente estável* se ela é assintoticamente estável e $\delta > 0$ pode ser escolhido de tal modo que a distância em (8.3) decai exponencialmente: existem C e $c > 0$ tais que toda solução máxima com $\beta(t_0) \in B_\delta(x_0)$ satisfaz

$$\|\beta(t) - \gamma(t)\| \leq Ce^{-c(t-t_0)}\|\beta(t_0) - \gamma(t_0)\| \text{ para todo } t \in [t_0, +\infty). \quad (8.4)$$

Dizemos que a trajetória γ é *marginalmente estável* se ela é estável mas não é assintoticamente estável.

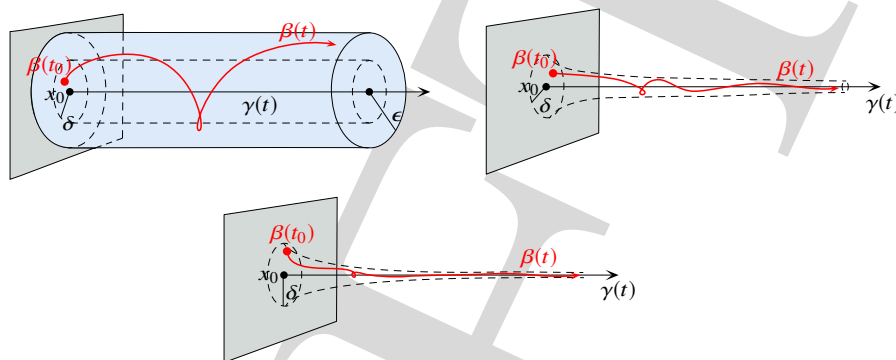


Figura 8.1: Significado das noções de estabilidade, estabilidade assintótica e estabilidade exponencial.

Alertamos o leitor de que na literatura existem outras definições de estabilidade, não necessariamente equivalentes a estas. Quando necessário para evitar ambiguidade, falamos de *estabilidade no sentido de Lyapunov* para nos referirmos às noções na Definição 8.1.

Observe também que a definição de estabilidade assintótica contém duas condições: trajetórias que começam próximas de γ permanecem próximas de γ para sempre (estabilidade) e, além disso, a distância com relação a γ vai para zero quando $t \rightarrow +\infty$. Esta última condição é chamada *atratividade*. O exemplo a seguir mostra que ela não implica a primeira e, portanto, não basta para estabilidade assintótica.

Exemplo 8.2. A Figura 8.2 descreve o comportamento das soluções da equação diferencial autônoma

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (8.5)$$

no domínio $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. O ponto $(1, 0)$ é estacionário e todas as trajetórias convergem para esse ponto quando $t \rightarrow +\infty$. No entanto, certas trajetórias com condição inicial próxima de $(1, 0)$ afastam-se, dando uma volta completa ao longo do círculo unitário antes de se reaproximarem de $(1, 0)$. Portanto, a solução constante $\gamma(t) \equiv (1, 0)$ não é estável, apesar de satisfazer (8.3). No Exercício 8.13 propomos ao leitor verificar estas afirmações analiticamente.

Observação 8.3. No caso da equação linear $x' = A(t)x$, todas as soluções têm o mesmo tipo de estabilidade. De fato, como sabemos, nesse caso a diferença de duas soluções é também uma solução. Então, segue diretamente das definições que uma solução γ qualquer é estável (respectivamente, assintoticamente estável ou exponencialmente estável) se e somente se a solução estacionária igual a zero é estável (respectivamente,

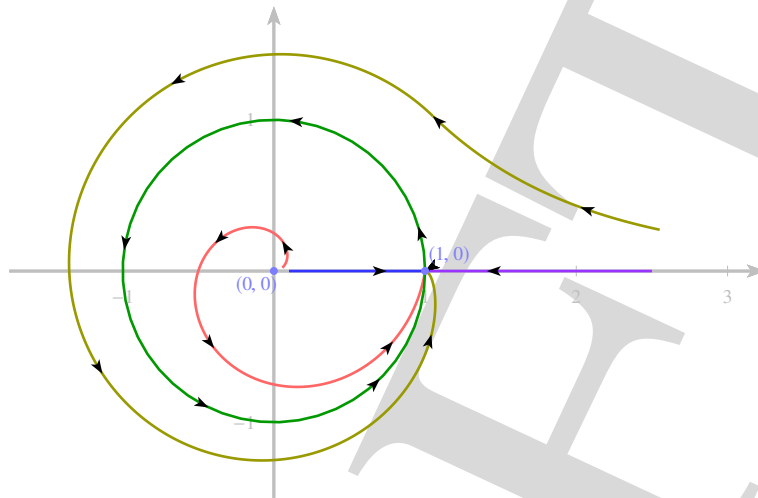


Figura 8.2: Ponto estacionário atrativo que não é estável.

assintoticamente estável ou exponencialmente estável). O tipo de estabilidade da solução estacionária será estudado na Seção 8.1.1 (caso autônomo) e na Seção 8.4.1 (caso geral).

Ao longo do capítulo, vamos supor que a função F na equação (8.1) é de classe C^1 . Inicialmente, nas Seções 8.1 e 8.2 consideraremos o caso em que a equação é autônoma (neste contexto sempre tomamos $t_0 = 0$). Posteriormente, nas Seções 8.3 e 8.4 estenderemos a teoria para o caso não autônomo. Num caso e no outro, apresentaremos duas abordagens principais ao problema da estabilidade: o *método da linearização*, que busca reduzir o estudo da estabilidade ao caso de sistemas lineares, e o *método das funções de Lyapunov* (também chamado *método direto*), cuja motivação original remonta ao estudo de sistemas mecânicos que dissipam energia. Ao final do capítulo, na Seção 8.4.3, discutiremos um desdobramento importante do método da linearização, chamado *método dos expoentes de Lyapunov*, cuja utilidade na teoria dos Sistemas Dinâmicos vai muito além da teoria da estabilidade.

8.1 Equações autônomas: estabilidade linear

Inicialmente, discutiremos o problema da estabilidade para trajetórias estacionárias da equação autônoma:

$$x' = F(x) \quad (8.6)$$

onde $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores de classe C^1 . Seja $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $F(x_0) = 0$.

Em consonância com a Definição 8.1, dizemos que a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv x_0$ é *estável* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda trajetória β de (8.6) com condição inicial $\beta(0) \in B_\delta(x_0)$ satisfaz

$$\|\beta(t) - x_0\| \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

Claro que a definição não é afetada se nos restringirmos aos valores pequenos de ϵ . Em tudo que segue consideraremos ϵ suficientemente pequeno para que a bola fechada de raio ϵ em torno de x_0 esteja contida em \mathcal{U} . Então, pelo Teorema 3.5, a condição anterior implica que $\beta(t)$ está definida para todo $t \in [0, +\infty)$.

Dizemos que $\gamma(t) \equiv x_0$ é *assintoticamente estável* se γ é estável e $\delta > 0$ pode ser escolhido de tal modo que toda trajetória com $\beta(0) \in B_\delta(x_0)$ satisfaz

$$\beta(t) \rightarrow x_0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Dizemos que $\gamma(t) \equiv x_0$ é *exponencialmente estável* se γ é assintoticamente estável e $\delta > 0$ pode ser escolhido de tal modo que convergência na fórmula anterior é exponencial: existem C e $c > 0$ tais que, para toda trajetória com $\beta(0) \in B_\delta(x_0)$,

$$\|\beta(t) - x_0\| \leq C e^{-ct} \|\beta(0) - x_0\| \text{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

Queremos encontrar condições suficientes e necessárias para que valha cada uma destas propriedades de estabilidade.

Considere o campo de vetores definido por $G(y) = F(y + x_0)$. É claro que G é de classe C^1 e que $x(t)$ é solução de (8.6) se e somente se $y(t) = x(t) - x_0$ é solução da equação

$$y' = G(y). \quad (8.7)$$

Em particular, a solução estacionária $x(t) \equiv x_0$ de (8.6) corresponde à solução estacionária $y(t) \equiv 0$ da nova equação (8.7). Além disso, como a correspondência entre as soluções das duas equações é mediante uma translação, $x(t) \equiv x_0$ é estável para (8.6) se e somente se $y(t) \equiv 0$ é estável para (8.7). Claro que valem observações análogas quanto à estabilidade assintótica e à estabilidade exponencial. Isto mostra que não constitui restrição para a nossa análise supor que $x_0 = 0$.

Como F é de classe C^1 , podemos usar a Fórmula de Taylor para escrever $F(x) = Ax + R(x)$ com

$$A = DF(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (8.8)$$

Então (8.6) pode ser escrita como uma *equação diferencial quase linear*:

$$x' = Ax + R(x). \quad (8.9)$$

Isto sugere que busquemos condições para estabilidade (ou instabilidade) em termos da derivada A do campo de vetores no ponto estacionário. Esta abordagem do problema da estabilidade é chamada *método da linearização* e a equação

$$x' = Ax \quad (8.10)$$

é chamada *linearização* da equação (8.6).

Observação 8.4. A estabilidade da trajetória da origem não é afetada por conjugação linear: o fato da trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ ser ou não estável, assintoticamente estável ou exponencialmente estável não muda se substituirmos o campo de vetores F por $P \circ F \circ P^{-1}$, onde $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um isomorfismo linear qualquer. Em particular, não é restrição supor que $A = DF(0)$ está na Forma Canônica de Jordan (Teorema 6.8).

8.1.1 Equações lineares

Comecemos por estudar a estabilidade da trajetória estacionária para a equação linear (8.10). Conforme apontamos na Observação 8.3, isto também determina o tipo de estabilidade das demais trajetórias.

Proposição 8.5. *Se $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores linear então a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é estável para o fluxo e^{tA} se e somente se todos os valores característicos têm parte real não positiva e todos os blocos de Jordan correspondentes aos valores característicos com parte real nula são diagonais ou quase diagonais (isto é, a respectiva parte nilpotente N_j é nula).*

Demonstração. Suponha que A não satisfaz a condição no enunciado. Então o fluxo e^{tA} contém trajetórias de uma (ou mais) das seguintes formas:

- $\beta(t) = e^{t\lambda_j} x_0$, correspondendo a valor característico real $\lambda_j > 0$; compare com (6.27).
- $\beta(t) = x_0 + tu_0$, correspondendo a valor característico $\lambda_j = 0$ com parte nilpotente N_j diferente de zero; compare com (6.28).
- $\beta(t) = e^{t\alpha_j} (x_0 \cos t\beta_j + y_0 \sin t\beta_j)$, correspondendo a valores característicos complexos $\alpha_j \pm i\beta_j$ com $\alpha_j > 0$; compare com (6.29).
- $\beta(t) = (x_0 \cos t\beta_j + y_0 \sin t\beta_j) + t(u_0 \cos t\beta_j + v_0 \sin t\beta_j)$, correspondendo a valores característicos imaginários $\pm i\beta_j$ com parte nilpotente N_j não nula.

Os pontos x_0, y_0, u_0 e v_0 variam em um subespaço vetorial; em particular, eles podem ser tomados arbitrariamente próximos da origem. Por outro lado, em qualquer dos quatro casos, a norma de $\beta(t)$ vai para infinito quando $t \rightarrow +\infty$ e isso implica que a solução β sai de toda vizinhança da origem. Isto mostra que $\gamma(t) \equiv 0$ é *instável*, ou seja, não é estável.

Agora suponha que A satisfaz a condição no enunciado. Vamos argumentar como no Lema 6.19. Fixe $\theta > 0$ tal que nenhum valor característico de A tem parte real em $(-\theta, 0)$. De acordo com a Observação 8.4, podemos supor que A tem a forma (6.31). Para $j = 1, \dots, r$, seja E_j o subespaço de \mathbb{R}^d correspondente ao bloco $N_j + D_j$. Cada $x \in \mathbb{R}^d$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \sum_{j=1}^r x_j, \quad x_j \in E_j.$$

Segue de (6.11) e de (6.18) que

$$D_j x_j \cdot x_j = \begin{cases} \lambda_j \|x_j\|^2 & \text{no caso de valor característico real} \\ \alpha_j \|x_j\|^2 & \text{no caso de valor característico complexo.} \end{cases}$$

Por hipótese, os números λ_j e α_j são não positivos. Pela escolha de θ também temos que cada um destes números ou é zero ou é menor ou igual que $-\theta$. Segue de (6.25) e (6.26) que $\|N_j(x_j)\| \leq \theta \|x_j\|$ para todo j . Além disso, por hipótese, $N_j = 0$ sempre

que a parte real do valor característico é nula. Consequentemente, $(N_j + D_j)x_j \cdot x_j \leq 0$ para todo x_j e todo j . Em particular,

$$Ax \cdot x = \sum_{j=1}^r (N_j + D_j)x_j \cdot x_j \leq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Seja $\beta(t) = e^{tA}x_0$ uma trajetória qualquer do campo de vetores linear A . Então

$$\frac{d}{dt} \|\beta(t)\|^2 = 2\beta'(t) \cdot \beta(t) = 2A\beta(t) \cdot \beta(t) \leq 0$$

para todo t . Em outras palavras, a norma $\|\beta(t)\|$ é não crescente. Isto implica que $\gamma(t) \equiv 0$ é estável para o fluxo do campo de vetores A : qualquer que seja $\epsilon > 0$, se $\beta(0) \in B_\epsilon(0)$ então $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \geq 0$. \square

Proposição 8.6. *Se $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores linear então a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável para o fluxo e^{tA} se e somente se A é um atrator hiperbólico, isto é, todos os valores característicos têm parte real negativa. Nesse caso, a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é mesmo globalmente exponencialmente estável: toda trajetória converge para zero exponencialmente.*

Demonstração. Pela proposição anterior, sabemos que se $\gamma(t) \equiv 0$ é estável então os valores característicos têm parte real não positiva. Se algum valor característico tem parte real nula então existe

- uma reta vetorial formada por trajetórias estacionárias $\beta(t) \equiv x_0$, correspondendo a valor característico real $\lambda_j = 0$ ou
- um plano vetorial formado por trajetórias periódicas $\beta(t) = x_0 \cos \beta_j t + y_0 \sin \beta_j t$, correspondendo a valores característicos imaginários $\pm i\beta_j$ com β_j diferente de zero.

Em qualquer dos casos, existem pontos arbitrariamente próximos da origem cujas trajetórias não convergem para a origem quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto, $\gamma(t) \equiv 0$ não é assintoticamente estável (embora seja estável).

Para provar a recíproca, suponha que A é um atrator hiperbólico. De acordo com a Observação 8.4, podemos supor que A está na Forma Canônica de Jordan. Então, tal como no Lema 6.19, existe $a > 0$ tal que

$$Ax \cdot x \leq -a\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Seja $\beta(t) = e^{tA}x_0$ uma trajetória qualquer do campo de vetores linear A . Então,

$$\frac{d}{dt} \|\beta(t)\|^2 = 2A\beta(t) \cdot \beta(t) \leq -2a\|\beta(t)\|^2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (8.11)$$

Como a expressão do lado direito é não positiva, isto implica que $\|\beta(t)\| \leq \|\beta(0)\|$ para todo $t \geq 0$ e, consequentemente, $\gamma(t) \equiv 0$ é estável: para todo $\epsilon > 0$, se $\beta(0) \in B_\epsilon(0)$

então $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \geq 0$. Mais ainda, de acordo com o Exercício 3.10, segue da desigualdade (8.11) que

$$\|\beta(t)\| \leq \|\beta(0)\|e^{-2at} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Portanto, $\gamma(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável e, em particular, assintoticamente estável. \square

8.1.2 Equações quase lineares

Voltemos agora ao contexto geral da equação quase linear (8.9). Quando a aproximação linear A tem valores característicos com parte real nula não é possível, em geral, inferir nada quanto à estabilidade da trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ para a equação quase linear (veja o Exercício 8.1). Mas quando a aproximação linear é hiperbólica ela determina completamente a estabilidade da trajetória estacionária:

Proposição 8.7. *Se $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores linear hiperbólico então a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é estável para o fluxo da equação (8.9) se e somente se A é um atrator hiperbólico. Nesse caso, $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável, e até exponencialmente estável, para (8.9).*

Demonstração. Suponha que A é um atrator hiperbólico. De acordo com a Observação 8.4, podemos supor que A está na Forma Canônica de Jordan. Então, tal como no Lema 6.19, existe $a > 0$ tal que

$$Ax \cdot x \leq -a\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

A condição no termo R em (8.8) implica que existe $\theta > 0$ tal que

$$\|R(x)\| \leq \frac{a}{2}\|x\| \text{ para todo } x \in B_\theta(0).$$

Então,

$$(A + R)(x) \cdot x \leq Ax \cdot x + \frac{a}{2}\|x\|^2 \leq -\frac{a}{2}\|x\|^2 \text{ para todo } x \in B_\theta(0). \quad (8.12)$$

Seja β uma solução máxima qualquer da equação (8.9) com condição inicial $\beta(0) \in B_\theta(0)$. Então,

$$\frac{d}{dt}\|\beta(t)\|^2 = 2(A + R)(\beta(t)) \cdot \beta(t) \leq -a\|\beta(t)\|^2 \text{ para todo } t \geq 0. \quad (8.13)$$

Como a expressão do lado direito é não positiva, isto implica que $\|\beta(t)\| \leq \|\beta(0)\|$ para todo $t \geq 0$ e, conseqüentemente, $\gamma(t) \equiv 0$ é estável: para todo $\epsilon > 0$, se $\beta(0) \in B_\epsilon(0)$ então $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \geq 0$. Além disso, de acordo com o Exercício 3.10, segue da desigualdade (8.13) que

$$\|\beta(t)\| \leq \|\beta(0)\|e^{-at} \text{ para todo } t \geq 0. \quad (8.14)$$

Portanto, $\gamma(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável e, em particular, assintoticamente estável.

Resta mostrar que se A tem algum valor característico com parte real positiva então $\gamma(t) \equiv 0$ é instável para (8.9). Vamos tratar apenas o caso em que todos os valores característicos de A são reais: o caso geral é análogo, embora os argumentos e notações se tornem mais intrincados, e fica a cargo do leitor (Exercício 8.14). Sejam $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ os autovalores de A , em ordem decrescente. Por hipótese, $\lambda_1 > 0$. Como estamos supondo que A está na Forma Canônica de Jordan, existe uma decomposição em soma direta ortogonal

$$\mathbb{R}^d = E^1 \oplus \dots \oplus E^k \text{ tal que } A(E^j) \subset E^j \text{ e } A|_{E^j} = \lambda_j I + N_j \text{ com } N_j \text{ nilpotente. (8.15)}$$

Mais ainda, usando a Observação 6.9, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos supor que $\|N_j\| \leq \epsilon$ para todo j . Para cada vetor $x \in \mathbb{R}^d$, representaremos por x_1, \dots, x_k as suas coordenadas relativamente à decomposição (8.15).

A estratégia da demonstração está delineada na Figura 8.3. Vamos considerar uma pequena bola $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \rho\}$ em torno da origem e um setor

$$S_\theta = \{x \in \mathbb{R}^d : \theta \|x_1\|^2 > \|x_2\|^2 + \dots + \|x_k\|^2\}$$

em torno do subespaço E^1 . Afirmamos que se ρ, θ e ϵ são suficientemente pequenos então toda trajetória $x(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$ com $x(0) \in B_\rho \cap S_\theta$ sai da bola B_ρ . Isto implica que a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é instável, claro.

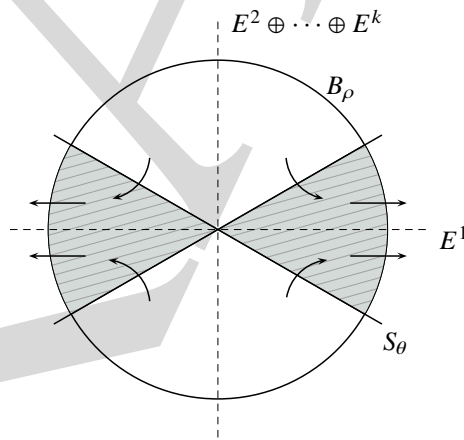


Figura 8.3: Se existem valores característicos com parte real positiva então a trajetória estacionária é instável.

Resta provar esta afirmação. As condições em ρ, θ e ϵ serão impostas ao longo do argumento. Suponha que existe uma trajetória $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$ de (8.9) tal que $x(0) \in S_\theta$ e $x(t) \in B_\rho$ para todo $t \geq 0$. Em particular, o Teorema 3.5 garante que $x(t)$ está definida para todo $t \in [0, +\infty)$.

Considere a função $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x) = \theta \|x_1\|^2 - (\|x_2\|^2 + \dots + \|x_k\|^2)$.

Note que S_θ é, precisamente, o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^d$ com $\phi(x) \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(x(t)) &= 2\theta x_1 \cdot x'_1 - 2 \sum_{j=2}^k x_j \cdot x'_j \\ &= 2\theta x_1 \cdot (\lambda_1 x_1 + N_1 x_1 + R(x)) - 2 \sum_{j=2}^k x_j \cdot (\lambda_j x_j + N_j x_j + R(x)). \end{aligned}$$

Tome ρ suficientemente pequeno para que $\|R(x)\| \leq \epsilon \|x\|$ para todo $x \in B_\rho$; lembre de (8.9). Represente por R_1, \dots, R_k as coordenadas da função R relativamente à decomposição (8.15). Além disso, tome $\theta \leq 1$, de tal modo que $\|x\|^2 \leq 2\|x_1\|^2$ para todo $x \in S_\theta$. Então,

$$(a) \quad x_1 \cdot (\lambda_1 x_1 + N_1 x_1 + R_1(x)) \geq \lambda_1 \|x_1\|^2 - \epsilon \|x_1\|^2 - \epsilon \|x_1\| \|x\| \geq (\lambda_1 - 3\epsilon) \|x_1\|^2;$$

$$(b) \quad x_j \cdot (\lambda_j x_j + N_j x_j + R_j(x)) \leq \lambda_j \|x_j\|^2 + \epsilon \|x_j\|^2 + \epsilon \|x_j\| \|x\| \leq (\lambda_j + 3\epsilon) \|x_j\|^2$$

para $j = 2, \dots, k$. Tome ϵ suficientemente pequeno para que $\lambda_1 > 3\epsilon$. Então, usando que $x \in S_\theta$,

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) \geq 2\theta(\lambda_1 - 3\epsilon) \|x_1\|^2 - 2 \sum_{j=2}^k (\lambda_j + 3\epsilon) \|x_j\|^2 \geq 2 \sum_{j=2}^k (\lambda_1 - \lambda_j - 6\epsilon) \|x_j\|^2.$$

Reduza ϵ , de tal modo que $\lambda_1 > \lambda_j + 6\epsilon$ para todo $j = 2, \dots, k$. Então $(d/dt)\phi(x(t)) \leq 0$ e, portanto, $\phi(x(t)) \geq \phi(x(0)) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Em particular, a trajetória $t \mapsto x(t)$ não sai do setor S_θ .

Agora considere a função $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2$. Então

$$\frac{d}{dt}\psi(x(t)) = 2 \sum_{j=1}^k x_j \cdot x'_j = 2 \sum_{j=1}^k x_j \cdot (\lambda_j x_j + N_j x_j + R(x)) \geq \sum_{j=1}^k (\lambda_j - 3\epsilon) \|x_j\|^2.$$

Pelo parágrafo anterior, $\|x_2(t)\|^2 + \dots + \|x_k(t)\|^2 \leq \theta \|x_1(t)\|^2$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Então,

$$\frac{d}{dt}\psi(x(t)) \geq 2(\lambda_1 - 3\epsilon) \|x_1\|^2 + 2(\lambda_k - 3\epsilon) \sum_{j=2}^k \|x_j\|^2 \geq 2[(\lambda_1 - 3\epsilon) + \theta(\lambda_k - 3\epsilon)] \|x_1\|^2.$$

Reduzindo ϵ e θ se necessário, podemos supor que a expressão entre colchetes é maior que $\lambda_1/2$. Então,

$$\frac{d}{dt}\psi(x(t)) \geq \lambda_1 \|x_1\|^2 \geq \frac{\lambda_1}{2} \|x\|^2 = \frac{\lambda_1}{2} \psi(x(t)).$$

Como $\lambda_1 > 0$, isto implica que $\psi(x(t))$ cresce exponencialmente com t . Isto é incompatível com a hipótese de que $x(t)$ não sai da bola B_ρ . Esta contradição prova a nossa afirmação e, portanto, a proposição fica demonstrada (no caso em que todos os valores característicos são reais). \square

Exemplo 8.8. Considere o ponto estacionário $(\pi, 0)$ do pêndulo harmônico

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(g/l) \operatorname{sen} x \end{cases} \quad (8.16)$$

(correspondendo à situação em que o pêndulo se encontra na vertical, apontando para cima). O campo de vetores é $F(x, y) = (y, -(g/l) \operatorname{sen} x)$ e a derivada $A = DF(\pi, 0)$ está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a linearização de (8.16) no ponto $(\pi, 0)$ é a equação

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (g/l)x \end{cases}$$

Note que A tem autovalores reais $\pm\sqrt{g/l}$. Segue da Proposição 8.7 que o ponto estacionário é instável, tanto para A quanto para F .

Observação 8.9. Ressaltamos um par de conclusões das Proposições 8.6 e 8.7, para equações lineares autônomas:

- (a) estabilidade assintótica implica estabilidade exponencial; portanto, os dois conceitos são equivalentes neste contexto;
- (b) se $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente (logo, exponencialmente) estável para a linearização então também é exponencialmente estável para a equação quase linear.

Como veremos na Seção 8.4.1, a afirmação (a) permanece válida para equações lineares não autônomas. Isso não é verdade para a afirmação (b): esse será um dos temas centrais das Seções 8.4.2 e 8.4.3.

8.2 Equações autônomas: funções de Lyapunov

O método que vamos introduzir a seguir tem a sua origem na observação empírica de que se a energia de um sistema físico é dissipada ao longo do tempo então o sistema tende a um estado de equilíbrio estável. Este método se aplica igualmente bem a sistemas lineares e não lineares e, como veremos, permite uma análise muito mais global do que aquela que é facultada pelo método da linearização, além de que pode ser aplicado em muitas situações em que o método da linearização é inconclusivo, por exemplo, quando a aproximação linear é não hiperbólica.

Tal como na seção anterior, suporemos que $x_0 = 0$ é um ponto estacionário da equação diferencial (8.6). Seja U_0 uma vizinhança de 0 contida no domínio \mathcal{U} do campo de vetores F e seja $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $V(0) = 0$. Diremos que V é

- *definida positiva* se $V(x) > 0$ para todo $x \in U_0 \setminus \{0\}$,

- *definida negativa* se $V(x) < 0$ para todo $x \in U_0 \setminus \{0\}$,
- *não negativa* se $V(x) \geq 0$ para todo $x \in U_0$ e
- *não positiva* se $V(x) \leq 0$ para todo $x \in U_0$.

A partir daqui suporemos que $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Definimos a sua *derivada ao longo do fluxo* da seguinte forma:

$$V'(x) = \frac{d}{dt}V(\beta(t)) \Big|_{t=0} = DV(x)F(x) \quad (8.17)$$

para cada $x \in U_0$, onde $\beta(t)$ representa qualquer solução de (8.6) com condição inicial $\beta(0) = x$. Observe que V' é contínua e $V'(0) = 0$, pois supomos $F(0) = 0$.

Definição 8.10. Dizemos que V é uma *função de Lyapunov* para o ponto estacionário $x_0 = 0$ se

1. V é definida positiva e
2. V' é não positiva.

Se, além disso, V' é definida negativa então dizemos que V é uma *função de Lyapunov estrita*.

Exemplo 8.11 (Pêndulo com atrito). Consideremos a equação do *pêndulo com atrito*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(g/l) \operatorname{sen} x - cy \end{cases} \quad (8.18)$$

onde c é uma constante não negativa. O caso $c = 0$ corresponde à equação (1.9) do pêndulo harmônico. A variável $x \in \mathbb{R}$ descreve a posição (ângulo) e $y \in \mathbb{R}$ descreve a velocidade angular do pêndulo. Note que a origem $(0, 0)$ é um ponto estacionário. A *energia* do sistema é a soma

$$E(x, y) = \frac{1}{2}m(l y)^2 + mg(l - l \cos x).$$

da energia cinética $(1/2)m(l y)^2$ com a energia¹ potencial $mg(l - l \cos x)$. Observe que:

1. $E(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) e vale a igualdade se e somente se $(x, y) = (2n\pi, 0)$ com $n \in \mathbb{Z}$; em particular, a restrição de E ao domínio $U_0 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ é definida positiva.
2. A derivada de E ao longo do fluxo é não positiva: dada qualquer trajetória $(x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= ml^2 y(t) y'(t) + mgl \operatorname{sen} x(t) x'(t) \\ &= -mgl y(t) \operatorname{sen} x(t) - mcl^2 y(t)^2 + mgl y(t) \operatorname{sen} x(t) \\ &= -mcl^2 y(t)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

¹A energia potencial está definida a menos de constante aditiva. Escolhemos a constante de tal modo que a energia potencial se anule para $x = 0$, ou seja, quando o pêndulo está na posição vertical apontando para baixo.

Portanto, E é uma função de Lyapunov (não estrita) para o pêndulo com atrito, no domínio U_0 .

8.2.1 Teorema de Estabilidade de Lyapunov

O seguinte resultado explica por que o conceito de função de Lyapunov tem um papel central na teoria da estabilidade de equações diferenciais:

Teorema 8.12. *Se existe uma função de Lyapunov $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ em alguma vizinhança do ponto estacionário $x_0 = 0$ então a respectiva trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ é estável. Além disso, se V é função de Lyapunov estrita então a estabilidade é assintótica.*

Demonstração. Considere qualquer $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que a bola fechada de raio ϵ em torno da origem esteja contida em U_0 . Seja τ o valor mínimo de V restrita ao bordo dessa bola, ou seja, à esfera de raio ϵ em torno de 0. Como V é definida positiva, τ é estritamente positivo. Então, como $V(0) = 0$ e V é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $V(x) < \tau$ para todo x na bola de raio δ em torno da origem. Claro que podemos tomar $\delta \leq \epsilon$. Seja $\beta(t)$ uma solução máxima qualquer com $\beta(0) \in B_\delta(0)$. Então $V(\beta(0)) < \tau$ e, como V' é não positiva, a função $t \mapsto V(\beta(t))$ é não crescente. Segue que $V(\beta(t)) < \tau$ e, em particular, $\beta(t)$ não está na esfera de raio ϵ em torno de 0, para todo $t > 0$. Logo, $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \geq 0$. Isto prova a primeira parte do enunciado.

Agora suponhamos que a função de Lyapunov V é estrita. Queremos provar que, para qualquer solução máxima β nas condições do parágrafo anterior, $\beta(t)$ converge para 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Já sabemos que a trajetória permanece em $B_\epsilon(0)$ e, conseqüentemente, está definida para todo $t \in [0, +\infty)$. As hipóteses sobre V implicam que a função $t \mapsto V(\beta(t))$ é decrescente e minorada (por zero). Segue que

$$a = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\beta(t))$$

existe, é não negativo e satisfaz $V(\beta(t)) \geq a$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Suponha que $a > 0$. Como V é contínua e $V(0) = 0$, existe $r > 0$ tal que $V(x) < a$ para todo x na bola de raio r em torno da origem. Isto implica que $\beta(t) \notin B_r(0)$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Por outro lado, como V' é definida negativa, existe $-b < 0$ tal que $V'(x) \leq -b$ para todo $x \notin B_r(0)$. Então

$$V(\beta(t)) \leq V(\beta(0)) - bt \text{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

Isto contradiz o fato de que V é minorada e esta contradição prova que a não pode ser positivo. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\beta(t)) = 0.$$

Isto implica que $V(y) = 0$ para todo ponto de acumulação de $\beta(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Como V é positiva definida, isto quer dizer que a origem é o único ponto de acumulação de $\beta(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Em outras palavras, $\beta(t)$ converge para 0 quando $t \rightarrow +\infty$, tal como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 8.13. Conforme vimos no Exemplo 8.11, a expressão

$$E(x, y) = (1/2)m(l\dot{y})^2 + mg(l - l \cos x)$$

define uma função de Lyapunov (não estrita) para o pêndulo com atrito. Logo, segue do Teorema 8.12 que a trajetória $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é estável. Este fato, *não* poderia ser obtido mediante o método da linearização. De fato, a linearização da equação (8.18) é

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(g/l)x. \end{cases}$$

e o respectivo campo de vetores linear tem autovalores com parte real nula. Conforme observamos anteriormente, nessas circunstâncias o método da linearização não permite inferir nada sobre a estabilidade da equação quase linear.

Por outro lado, o simples resultado de estabilidade é um pouco decepcionante: a intuição física sugere fortemente que a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é *assintoticamente* estável para o pêndulo com coeficiente de atrito $c > 0$. Essa intuição está correta, e a estabilidade assintótica pode ser demonstrada usando o Teorema 8.12, mas para isso é necessário considerar *outra* função de Lyapunov. Veja o Exercício 8.4. Na verdade, também é possível demonstrar a estabilidade assintótica de $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ usando a função de Lyapunov $E(x, y)$, mas para isso precisamos de um critério mais forte de estabilidade, que será apresentado no Teorema 8.16. Veja o Exemplo 8.17.

Do modo como foram definidas anteriormente, as noções de estabilidade, estabilidade assintótica e estabilidade exponencial são puramente locais: elas dizem respeito apenas ao comportamento de trajetórias em alguma vizinhança da trajetória γ que queremos analisar. No entanto, em muitas aplicações práticas não basta saber que tal vizinhança existe, é igualmente importante poder estimar o seu tamanho. Por exemplo, quando γ é assintoticamente estável é, usualmente, importante conhecer o seu *domínio de atração*, ou seja, o conjunto dos pontos cujas trajetórias são assintóticas a γ .

No contexto do Teorema 8.12, a demonstração fornece uma estimativa para o domínio de atração da trajetória $\gamma(t) \equiv 0$: ele contém qualquer bola $B_\delta(0)$ tal que

$$V(x) < \min\{V(y) : y \in \partial B_\epsilon(0)\} \text{ para todo } x \in B_\delta(0).$$

A partir desta observação, podemos obter facilmente um critério de estabilidade assintótica *global*, quando o domínio do campo de vetores F é todo o espaço euclidiano $\mathcal{U} = \mathbb{R}^d$.

Corolário 8.14. *Suponha que existe uma função de Lyapunov estrita $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$. Então a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente assintoticamente estável: toda trajetória da equação diferencial converge para $x_0 = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Seja β uma solução máxima qualquer e seja $L = V(\beta(0))$. A hipótese de que $V(x)$ vai para infinito quando $\|x\|$ vai para infinito garante que existe $\rho > 0$ tal que $V(x) > L$ para todo $x \notin B_\rho(0)$. Como a função $t \mapsto V(\beta(t))$ é decrescente, concluímos que $\beta(t) \in B_\rho(0)$ para todo $t \geq 0$. Isto implica que $\beta(t)$ está definido para

todo $t \in [0, +\infty)$ e também significa que para provar que $\beta(t) \rightarrow 0$ basta mostrar que a origem é o único ponto de acumulação da trajetória quando $t \rightarrow +\infty$. Isto pode ser feito usando exatamente o mesmo argumento que empregamos na segunda parte do Teorema 8.12. \square

A hipótese de que $V(x)$ vai para infinito quando $\|x\|$ vai para infinito foi usada na demonstração para garantir que as regiões da forma $Y_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) \leq \rho\}$ são limitadas. Se omitirmos essa hipótese, pode acontecer que Y_ρ seja ilimitada (para ρ grande). Nesse caso, o fato de que nenhuma trajetória pode sair de Y_ρ não é mais impedimento a que algumas trajetórias possam escapar para infinito, o que é incompatível com estabilidade assintótica global. O Exercício 8.5 mostra que essa possibilidade é real e, portanto, essa hipótese não pode ser omitida no corolário.

Para terminar, apresentamos uma variante do Teorema 8.12, juntamente com o Corolário 8.14, para a estabilidade exponencial. A demonstração fica a cuidado do leitor (Exercício 8.12).

Teorema 8.15. *Suponha que existem constantes $a, b, c > 0$ e $p \geq 1$ e uma função $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 em alguma vizinhança do ponto estacionário $x_0 = 0$, tais que*

1. $a\|x\|^p \leq V(x) \leq b\|x\|^p$ para todo $x \in U_0$ e
2. $V'(x) \leq -c\|x\|^p$ para todo $x \in U_0$.

Então a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável. Além disso, se $U_0 = \mathcal{U} = \mathbb{R}^d$ então $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente exponencialmente estável: toda trajetória da equação diferencial converge exponencialmente para $x_0 = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

8.2.2 Teorema do Conjunto Invariante

Continuamos considerando a equação autônoma (8.6). Os resultados que apresentamos a seguir melhoram os critérios de estabilidade da seção anterior em, pelo menos, dois aspectos importantes. O primeiro é que eles permitem obter estabilidade assintótica sem precisar supor que a função de Lyapunov seja estrita. O seguinte teorema, que provaremos daqui a pouco, ilustra bem este ponto:

Teorema 8.16. *Suponha que existe uma função de Lyapunov $V : U_0 \rightarrow [0, +\infty)$ numa vizinhança U_0 do ponto estacionário $x_0 = 0$ tal que $\gamma(t) \equiv 0$ é a única trajetória contida em $\{x \in \mathcal{U} : V'(x) = 0\}$. Então $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável e o seu domínio de atração contém todo conjunto $Y_\rho = \{x \in \mathcal{U} : V(x) \leq \rho\}$ que seja relativamente compacto em U_0 .*

Exemplo 8.17. Vimos no Exemplo 8.11 que a energia $E(x, y)$ do pêndulo com atrito é uma função definida positiva numa vizinhança da origem e a sua derivada ao longo do fluxo $E'(x, y) = -mcl^2y^2$ é não positiva. Além disso, $E'(x, y) = 0$ se e somente se $y = 0$. Da equação (8.18) segue que se $(x(t), y(t))$ é trajetória com $y(t) \equiv 0$ então $x(t) \equiv k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, no domínio $U_0 = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ a única trajetória contida em $\{(x, y) : E'(x, y) = 0\}$ é a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv (0, 0)$. Isto mostra que estamos nas condições do Teorema 8.16 e, portanto, podemos concluir que $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é assintoticamente estável.

Outro aspecto importante em que os resultados desta seção melhoram aqueles que apresentamos na seção anterior é que eles permitem provar estabilidade de conjuntos invariantes bem mais gerais do que simples pontos estacionários. Para explicar isto, precisamos introduzir algumas definições. A partir daqui não precisamos supor que a origem, ou qualquer outro ponto do domínio \mathcal{U} , seja um ponto estacionário.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathcal{U}$ é *invariante* (no futuro) pelo fluxo $(f^t)_t$ de (8.6) se $f^t(x) \in X$ para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$. O exemplo mais simples é o conjunto formado por um ou mais pontos estacionários. Dado qualquer $Y \subset \mathcal{U}$, chamamos *conjunto invariante maximal* em Y o conjunto

$$X = \{x \in Y : f^t(x) \in Y \text{ para todo } t \geq 0\}. \quad (8.19)$$

Deixamos ao cuidado do leitor (Exercício 8.7) verificar que X contém todo conjunto invariante que está contido em Y . O resultado a seguir é chamado Teorema do Conjunto Invariante, ou Teorema de Krasovskii–LaSalle:

Teorema 8.18. *Seja $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida num aberto $U_0 \subset \mathcal{U}$ e seja X o conjunto invariante maximal em $\{x \in U_0 : V'(x) = 0\}$. Suponha que existe $\rho > 0$ tal que $Y_\rho = \{x \in U_0 : V(x) \leq \rho\}$ é relativamente compacto em U_0 (ou seja, tal que o seu fecho em U_0 é um compacto) e $V'(x) \leq 0$ para todo x numa vizinhança de Y_ρ . Então toda trajetória β com condição inicial $\beta(0) \in Y_\rho$ está definida para todo $t \in [0, +\infty)$ e converge para X (no sentido de que X contém todo ponto de acumulação da trajetória) quando $t \rightarrow +\infty$.*

Observe que o Teorema 8.16 é um caso particular do Teorema 8.18, em que o conjunto invariante maximal X se reduz ao ponto estacionário 0. O Teorema 8.18 também implica o seguinte variante global com $U_0 = \mathcal{U} = \mathbb{R}^d$:

Corolário 8.19. *Suponha que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^d$ e existe função $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que V' é não positiva e $V(x) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Seja X o conjunto invariante maximal em $\{x \in \mathbb{R}^d : V'(x) = 0\}$. Então toda trajetória de (8.6) converge para X quando $t \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. A hipótese de que $V(x) \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$ implica que $Y_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) \leq \rho\}$ é limitado para todo ρ . Como este conjunto é fechado em \mathbb{R}^d , segue que ele é compacto. Dada qualquer solução máxima $\beta(t)$, fixe $\rho > V(\beta(0))$. Usando o Teorema 8.18, segue que $\beta(t)$ converge para o conjunto invariante maximal X quando $t \rightarrow +\infty$. \square

Demonstração do Teorema 8.18. O resultado elementar que apresentamos a seguir, conhecido como Lema de Barbalat, é um ingrediente importante:

Lema 8.20. *Seja $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 cuja derivada φ' é uniformemente contínua. Se o limite $a = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ existe e é finito então $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0$.*

Demonstração. Suponha que a conclusão é falsa. Então existe $b > 0$ e uma sequência $(t_n)_n \rightarrow +\infty$ tal que $|\varphi'(t_n)| \geq b$ para todo n . Por continuidade uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $|s - t| \leq \delta$ implica $|\varphi'(s) - \varphi'(t)| \leq b/2$. Em particular,

$$|\varphi'(t)| \geq \frac{b}{2} \text{ para todo } t \in [t_n - \delta, t_n + \delta] \text{ e todo } n.$$

Consequentemente, usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$|\varphi(t_n + \delta) - \varphi(t_n - \delta)| = \left| \int_{t_n - \delta}^{t_n + \delta} \varphi'(s) ds \right| = \int_{t_n - \delta}^{t_n + \delta} |\varphi'(s)| ds \geq 2\delta \frac{b}{2}$$

para todo n . Mas a expressão do lado esquerdo converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$, uma vez que tanto $\varphi(t_n + \delta)$ quanto $\varphi(t_n - \delta)$ convergem para a . Esta contradição prova a conclusão do lema. \square

Dada qualquer trajetória β da equação diferencial (8.6) com condição inicial $\beta(0) \in Y_\rho$, tomemos $\varphi(t) = V(\beta(t))$ para todo t no domínio de β . Afirmamos que esse domínio contém $[0, +\infty)$ e que a derivada $\varphi'(t)$ converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Inicialmente, note que φ é função de classe C^1 no seu domínio, uma vez que é uma composição de funções de classe C^1 . A hipótese $V' \leq 0$ garante que φ é não crescente e, portanto, $\varphi(t) \leq \varphi(0) \leq \rho$ para todo $t \geq 0$. Em outras palavras,

$$\beta(t) \in Y_\rho \text{ para todo } t \geq 0. \quad (8.20)$$

Como Y_ρ é relativamente compacto, segue do Teorema 3.5 que $\beta(t)$ está definida para todo $t \in [0, +\infty)$. Além disso, a norma do campo de vetores F restrito a Y_ρ é limitada. Isto implica que $\beta'(t) = F(\beta(t))$ é limitada e então, pelo Teorema da Média, β é lipschitziana. Em particular, β é uniformemente contínua. Como V é de classe C^1 e Y_ρ é relativamente compacto, também temos que a restrição da derivada DV ao conjunto Y_ρ é uniformemente contínua. Juntando estas observações, concluímos que

$$t \mapsto \varphi'(t) = DV(\beta(t))F(\beta(t))$$

é uniformemente contínua. Por outro lado, como V é contínua e Y_ρ é relativamente compacto, a função φ é minorada. Conforme observamos anteriormente, ela também é não crescente. Segue que o limite de $\varphi(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$ existe e é finito. Portanto, estamos nas condições de aplicar o Lema 8.20 para concluir que $\varphi'(t)$ converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$, tal como foi afirmado.

Chamamos conjunto ω -limite de uma solução máxima β o conjunto de todos os pontos de acumulação de $\beta(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja,

$$\Omega = \{x \in \mathcal{U} : \text{existe } (t_n)_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } (\beta(t_n))_n \rightarrow x\}.$$

A propriedade (8.20) implica que Ω está contido no fecho de Y_ρ e, em particular, é relativamente compacto em U_0 . Como $V'(\beta(t)) = \varphi'(t)$ converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$ e a função V' é contínua, o domínio Ω está contido em $\{x \in U_0 : V'(x) = 0\}$. Dado qualquer $x \in \Omega$, considere $(t_n)_n \rightarrow +\infty$ tal que $(\beta(t_n))_n \rightarrow x$. Então, para cada $t > 0$ tal que $f^t(x)$ está definido,

$$\beta(t_n + t) = f^t(\beta(t_n)) \rightarrow f^t(x) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, $f^t(x) \in \Omega$. Como Ω é relativamente compacto em U_0 , segue que $f^t(x)$ está definido para todo $t \in [0, +\infty)$. Isto prova que Ω é conjunto invariante e, portanto, Ω está contido no conjunto invariante maximal X .

Esta última afirmação significa, precisamente, que $\beta(t)$ converge para X quando $t \rightarrow +\infty$. Desta forma a demonstração do Teorema 8.18 está completa. \square

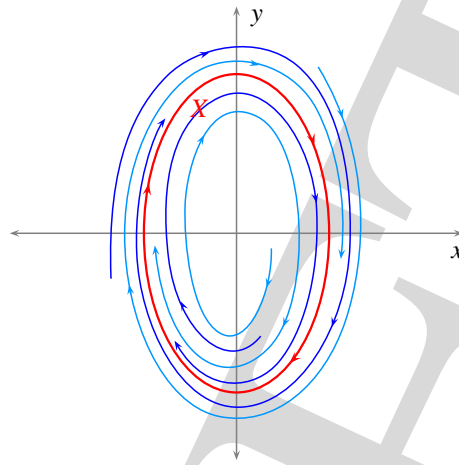


Figura 8.4: Um conjunto invariante que é um ciclo limite.

Exemplo 8.21. Considere a equação

$$\begin{cases} x' = y - x^7(x^4 + 2y^2 - 10) \\ y' = -x^3 - 3y^2(x^4 + 2y^2 - 10). \end{cases} \quad (8.21)$$

A curva fechada $X = \{(x, y) : x^4 + 2y^2 - 10 = 0\}$ é um conjunto invariante, pois

$$\frac{d}{dt}(x^4 + 2y^2 - 10) = 4x^3x' + 4yy' = (-4x^{10} - 12y^3)(x^4 + 2y^2 - 10)$$

e esta expressão é identicamente nula em X . Note que, restrita a X , a equação (8.21) fica reduzida a

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3. \end{cases}$$

Segue (justifique!) que X consiste de uma única trajetória periódica, percorrida no sentido horário. A Figura 8.4 também descreve o comportamento das trajetórias próximas, sugerindo que elas convergem para X quando $t \rightarrow +\infty$. Isto pode ser demonstrado usando a função $V(x, y) = x^4 + 2y^2 - 10$ e o Teorema 8.18. Deixamos as verificações ao cuidado do leitor (Exercício 8.8).

8.3 Análise de Lyapunov de equações não autônomas

Até o momento, temos tratado sobretudo do caso de soluções estacionárias. No início da Seção 8.1, mostramos como reduzir a questão da estabilidade de uma solução estacionária de (8.6) ao caso $\gamma(t) \equiv 0$. Na verdade, como explicaremos em seguida, é possível fazer uma redução semelhante para uma trajetória qualquer, estacionária ou não. A diferença é que a equação diferencial resultante não é autônoma, em geral. Então, é natural analisar a estabilidade de soluções gerais, não necessariamente estacionárias,

no âmbito mais amplo da equação (8.1). Como veremos, muitas das ideias e fatos apresentados nas Seções 8.1 e 8.2 continuam válidos nesse âmbito.

Para começar, apresentemos a redução ao caso estacionário que acabamos de mencionar. Lembre que supomos que a função F é de classe C^1 . Dada uma solução qualquer $\gamma : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de (8.1), consideremos a mudança de variável

$$x = y + \gamma(t).$$

Se $x(t)$ é solução de (8.1) então $y(t) = x(t) - \gamma(t)$ satisfaz

$$y'(t) = x'(t) - \gamma'(t) = F(t, x(t)) - F(t, \gamma(t)) = F(t, y(t) + \gamma(t)) - F(t, \gamma(t)),$$

ou seja, $y(t)$ é solução da equação diferencial

$$y' = G(t, y), \quad G(t, y) = F(t, y + \gamma(t)) - F(t, \gamma(t)). \quad (8.22)$$

Observe que G é de classe C^1 no domínio $\mathcal{V} = \{(t, y) : t > a \text{ e } (t, y + \gamma(t)) \in \mathcal{U}\}$ e que $G(t, 0) = 0$ para todo $t > a$. Veja a Figura 8.5. Reciprocamente, se $y(t)$ é solução de (8.22) então $x(t) = y(t) + \gamma(t)$ é solução de (8.1). Ou seja, temos uma correspondência simples (mediante translação) entre as soluções das duas equações.

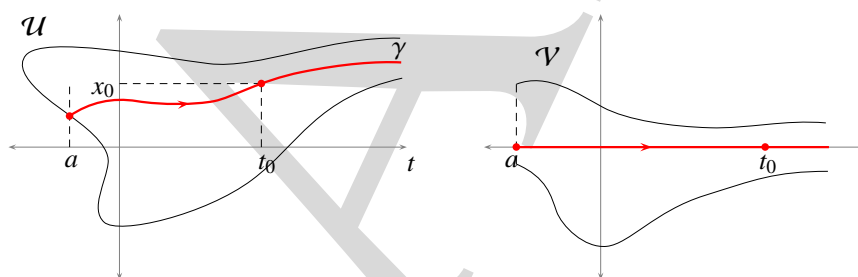


Figura 8.5: Redução ao caso de solução estacionária na origem.

O ponto desta observação é que a solução $\gamma(t)$ de (8.1) considerada inicialmente corresponde à solução constante igual a zero de (8.22). Além disso, como a correspondência entre as soluções das duas equações é mediante uma translação, $\gamma(t)$ é estável (respectivamente, assintoticamente estável ou exponencialmente estável) para (8.1) se e somente se a solução constante igual a zero é estável (respectivamente, assintoticamente estável ou exponencialmente estável) para (8.22). Portanto, não constitui restrição supor que

$$F(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(t) = 0 \quad \text{para todo } t > a. \quad (8.23)$$

Faremos isso no que segue. Então, por unicidade de soluções (Teorema 3.2), $\gamma(t) \equiv 0$ é a única solução de (8.1) que assume o valor zero em algum tempo $t > a$.

Exemplo 8.22. No caso particular da equação diferencial linear $x' = A(t)x$, a redução que acabamos de descrever preserva a forma da equação: se $F(t, x) = A(t)x$ então

$$G(t, y) = F(t, y + \gamma(t)) - F(t, \gamma(t)) = A(t)(y + \gamma(t)) - A(t)\gamma(t) = A(t)y = F(t, y)$$

qualquer que seja a solução $\gamma(t)$. Isto também está relacionado com o fato de que no caso linear todas as soluções têm o mesmo tipo de estabilidade (lembre da Observação 8.3).

Em consonância com a Definição 8.1, dizemos que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é *estável* se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda solução máxima β de (8.1) com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ está definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e satisfaz $\|\beta(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Dizemos que $\gamma(t) \equiv 0$ é *assintoticamente estável* se ela é estável e $\delta > 0$ pode ser escolhido de tal modo que toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ converge para 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, dizemos que $\gamma(t) \equiv 0$ é *exponencialmente estável* se ela é assintoticamente estável e $\delta > 0$ pode ser escolhido de tal modo que a convergência é exponencial: existem C e $c > 0$ tais que para toda solução máxima β com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ temos

$$\|\beta(t)\| \leq C e^{-c(t-t_0)} \|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \in [t_0, +\infty).$$

Conforme observamos anteriormente, $\gamma(t) \equiv 0$ é a solução de (8.1) com condição inicial $\gamma(t_0) = 0$ para qualquer $t_0 > a$. Portanto, a escolha do tempo inicial t_0 é um pouco artificial neste contexto. Ora, à primeira vista, as definições que acabamos de dar dependem da escolha do tempo inicial: parece que $\gamma(t) \equiv 0$ poderia ser estável para um dado tempo inicial $t_0 > a$ e instável para outro tempo inicial $\tilde{t}_0 > a$. Na verdade, de acordo com o Exercício ??, não é assim: as propriedades de estabilidade, estabilidade assintótica e estabilidade exponencial não são afetadas pela escolha do tempo inicial t_0 . Isto também legitima que tenhamos fixado $t_0 = 0$ no caso autônomo.

8.3.1 Estabilidade uniforme

Por outro lado, as definições dessas propriedades envolvem certos números que, esses sim, podem depender da escolha do tempo inicial (o Exemplo 8.24 e o Exercício 8.18 ilustram essa possibilidade). Em aplicações práticas é muito conveniente que haja uniformidade dessas constantes. Isso conduz às seguintes noções.

Dizemos que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é *uniformemente estável* se ela é estável (para todo tempo inicial $t_0 > a$) e o número $\delta > 0$ na definição acima pode ser tomado independente de t_0 . Em outras palavras, estabilidade uniforme significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t_0 > a$, toda solução máxima β com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ está definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e satisfaz $\|\beta(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$.

Dizemos que $\gamma(t) \equiv 0$ é *uniformemente assintoticamente estável* se ela é assintoticamente estável (para todo tempo inicial $t_0 > a$) com $\delta > 0$ independente de t_0 (observe que isto implica que γ é uniformemente estável) e a convergência é uniforme no seguinte sentido:

- (U) para todo $\rho \leq \epsilon$ existe $T > 0$ tal que, para todo $t_0 > a$, toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ satisfaz $\|\beta(t)\| \leq \rho$ para todo $t \geq t_0 + T$.

Dizemos que $\gamma(t) \equiv 0$ é *uniformemente exponencialmente estável* se ela é exponencialmente estável (para todo tempo inicial $t_0 > a$) com constantes $\delta > 0$, $C > 0$ e $c > 0$ independentes de t_0 . É fácil ver que se $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente exponencialmente estável então ela é uniformemente assintoticamente estável.

Observação 8.23. Quando a equação diferencial é autônoma, estabilidade, estabilidade assintótica e estabilidade exponencial são, automaticamente, uniformes.

De fato, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é estável. Então, para qualquer tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}$ fixado, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\beta(t_0) \in B_\delta(0) \text{ implica } \beta(t) \in B_\epsilon(0) \text{ para todo } t \in [t_0, +\infty). \quad (8.24)$$

Considere qualquer $\tilde{t}_0 \in \mathbb{R}$ e seja $\tilde{\beta}$ qualquer solução máxima com $\tilde{\beta}(\tilde{t}_0) \in B_\delta(0)$. Como a equação é autônoma, a curva definida por $\beta(t) = \tilde{\beta}(t + \tilde{t}_0 - t_0)$ também é uma solução máxima. Além disso, $\beta(t_0) = \tilde{\beta}(\tilde{t}_0) \in B_\delta(0)$. Segue de (8.24) que $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$ ou, equivalentemente, $\tilde{\beta}(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \in [\tilde{t}_0, +\infty)$. Isto mostra que (8.24) permanece válida, com o mesmo valor de δ , se substituirmos t_0 por qualquer outro tempo inicial. Logo, $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente estável.

Agora suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável. Tome $\delta > 0$ tal que, além de (8.24), para algum tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}$ também temos:

$$\beta(t_0) \in B_\delta(0) \text{ implica } \beta(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (8.25)$$

É possível mostrar (veja Hahn [38, Teorema 38.5]) que esta convergência é uniforme com relação ao ponto $x = \beta(t_0)$: para todo $\rho > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$\beta(t_0) \in B_\delta(0) \text{ implica } \|\beta(t)\| \leq \rho \text{ para todo } t \geq t_0 + T. \quad (8.26)$$

Então, o mesmo argumento do parágrafo anterior mostra que (8.26) permanece válida, com os mesmos valores de δ e T , quando substituirmos t_0 por qualquer outro tempo inicial. Isto significa que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável.

Finalmente, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável. Fixe C , c e δ tais que, para algum tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\beta(t_0) \in B_\delta(0) \text{ implica } \|\beta(t)\| \leq Ce^{-c(t-t_0)}\|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \geq t_0. \quad (8.27)$$

O mesmo argumento do primeiro parágrafo mostra que (8.27) permanece válida quando substituirmos t_0 por qualquer outro tempo inicial, com os mesmos valores de C , c e δ . Portanto, $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente exponencialmente estável.

Uniformidade também segue automaticamente quando a função $F(t, x)$ é periódica na variável t . A este respeito, veja os Teoremas 38.4 e 38.5 em Hahn [38].

Exemplo 8.24. Considere a equação diferencial no domínio $\mathcal{U} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$

$$x' = -\frac{x}{t}.$$

Usando o fato de que se trata de uma equação a variáveis separáveis, é fácil encontrar a expressão geral das suas soluções: para todo $t_0 > 0$ e todo $x_0 \in \mathbb{R}$, a solução β com condição inicial $\beta(t_0) = x_0$ é dada por

$$\beta(t) = \frac{t_0}{t}x_0.$$

Note que $\|\beta(t)\| \leq \|x_0\|$ para todo $t \geq t_0$ e que $\beta(t)$ sempre converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$. No entanto, esta convergência não é uniforme, no sentido da condição (U) acima. Portanto, a solução constante igual a zero é uniformemente estável (podemos tomar $\delta = \epsilon$) e assintoticamente estável mas não é uniformemente assintoticamente estável.

No Exercício 8.18 propomos ao leitor construir exemplos estáveis mas não uniformemente estáveis.

8.3.2 Funções de Lyapunov

Seja U_0 uma vizinhança da origem tal que $(a, +\infty) \times U_0$ está contido no domínio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+d}$ da função F . Dizemos que uma função contínua $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é *definida positiva* (respectivamente, *não negativa*) se $V(t, 0) = 0$ para todo $t > a$ e existe uma função $V_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva (respectivamente, não negativa), no sentido da Seção 8.2, tal que

$$V(t, x) \geq V_0(x) \text{ para todo } (t, x) \in (a, +\infty) \times U_0. \quad (8.28)$$

Analogamente, dizemos que $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é *definida negativa* (respectivamente, *não positiva*) se $V(t, 0) = 0$ para todo $t > a$ e existe $V_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida negativa (respectivamente, não positiva), no sentido da Seção 8.2, tal que $V(t, x) \leq V_0(x)$ para todo $(t, x) \in (a, +\infty) \times U_0$.

A partir daqui, suponhamos que V é de classe C^1 . A sua *derivada ao longo do fluxo* é dada por

$$V'(t, x) = \partial_t V(t, x) + \partial_x V(t, x)F(t, x). \quad (8.29)$$

Observe que V' é contínua e $V'(t, 0) = 0$ para todo $t > a$, uma vez que supomos $V(t, 0) = 0$ e $F(t, 0) = 0$ para todo $t > a$.

Definição 8.25. Dizemos que V é uma *função de Lyapunov* para a solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ se

- V é definida positiva e
- V' é não positiva.

Se, além disso, V' é definida negativa então dizemos que V é uma *função de Lyapunov estrita*. Num caso ou no outro, dizemos que V é *dominada* se existe uma função definida positiva $W_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$V(t, x) \leq W_0(x) \text{ para todo } (t, x) \in (a, +\infty) \times U_0. \quad (8.30)$$

O resultado a seguir generaliza o Teorema 8.12:

Teorema 8.26 (Lyapunov). *Se existe uma função de Lyapunov $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ então a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é estável em todo tempo $t_0 > a$. Se a função de Lyapunov V é dominada então $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente estável. Se a função de Lyapunov V é dominada e estrita então $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração. Por hipótese, existem $V_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva e $V_1 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ não positiva tais que

$$V(t, x) \geq V_0(x) \quad \text{e} \quad V'(t, x) \leq V_1(x) \quad \text{para todo } (t, x) \in (a, +\infty) \times U_0.$$

Considere $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada de raio ϵ em torno da origem está contida em U_0 . Como V_0 é definida positiva, o número

$$\tau = \min\{V_0(x) : \|x\| = \epsilon\} \quad (8.31)$$

é positivo. Então, como a função $x \mapsto V(t_0, x)$ é contínua e se anula na origem, existe $\delta > 0$ tal que

$$V(t_0, x) < \tau \quad \text{para todo } x \in B_\delta(0). \quad (8.32)$$

Podemos escolher $\delta < \epsilon$, claro. Seja β uma solução máxima qualquer de (8.1) com $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$. Como

$$V'(t, \beta(t)) \leq V_1(\beta(t)) \leq 0 \quad \text{para todo } t > a,$$

temos que $V(t, \beta(t)) \leq V(t_0, \beta(t_0)) < \tau$ para todo $t \geq t_0$. Pela definição de τ , isto implica que $\beta(t)$ permanece na bola de raio ϵ em torno da origem, para todo $t \geq t_0$. Em particular, β está definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Assim, fica provado que $\gamma(t) \equiv 0$ é estável.

Se a função de Lyapunov é dominada por alguma função definida positiva $W_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos substituir (8.32) por

$$W_0(x) < \tau \quad \text{para todo } x \in B_\delta(0). \quad (8.33)$$

Desta forma, δ é independente do tempo inicial t_0 e, dada qualquer solução máxima β com $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$, temos que $V(t, \beta(t)) \leq V(t_0, \beta(t_0)) < \tau$ para todo $t \geq t_0$ e, portanto, $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \geq t_0$. Isto mostra que neste caso a estabilidade é uniforme.

Agora suponhamos que a função de Lyapunov V é estrita, além de ser dominada. Tome $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ como no parágrafo anterior. Seja ζ o supremo da função W_0 na bola fechada de raio ϵ em torno da origem. Dado $\rho \leq \epsilon$, defina

$$\xi = \inf\{V_0(y) : \|y\| \geq \rho\}.$$

Note que $\xi > 0$ porque V_0 é definida positiva. Como W_0 é contínua e $W_0(0) = 0$, existe $r > 0$ tal que $W_0(y) < \xi$ sempre que $\|y\| < r$. Como V_1 é definida negativa, o número

$$-\eta = \sup\{V_1(y) : \|y\| \geq r\}$$

é negativo. Escolha qualquer $T > \zeta/\eta$. Suponha que $\|\beta(t)\| \geq r$ para todo $t \in [t_0, t_0+T]$. Então, $V'(t, \beta(t)) \leq V_1(\beta(t)) \leq -\eta$ para todo $t \in [t_0, t_0+T]$ e, portanto,

$$V(t_0+T, \beta(t_0+T)) = V(t_0, \beta(t_0)) + \int_{t_0}^{t_0+T} V'(s, \beta(s)) ds \leq W_0(\beta(t_0)) - T\eta \leq \zeta - T\eta < 0.$$

Isto é uma contradição, porque $V(t, \beta(t)) \geq V_0(\beta(t)) \geq 0$ para todo $t > a$. Esta contradição prova que existe $\bar{t} \in [t_0, t_0+T]$ tal que $\|\beta(\bar{t})\| < r$. Então, como V' é não positiva,

$$V_0(\beta(t)) \leq V(t, \beta(t)) \leq V(\bar{t}, \beta(\bar{t})) \leq W_0(\beta(\bar{t})) < \xi$$

para todo $t \geq \bar{t}$. Pela definição de ξ , isto implica que $\|\beta(t)\| < \rho$ para todo $t \geq \bar{t}$ e, por maioria de razão, para todo $t \geq t_0+T$. Isto prova estabilidade assintótica uniforme. \square

8.3.3 Comentários adicionais

Nesta seção coletamos alguns comentários sobre quatro temas distintos, suplementares à discussão anterior: estabilidade uniforme global, Teorema do Conjunto Invariante, critérios de instabilidade e teoria de Lyapunov recíproca.

Estabilidade uniforme global. Dizemos que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é *globalmente uniformemente assintoticamente estável* se ela é uniformemente estável e a condição de atratividade uniforme vale em bolas com raio δ arbitrariamente grande:

- (V) para todo $\delta > 0$ e todo $\rho > 0$ existe $T > 0$ tal que, para todo $t_0 > a$, toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ satisfaz $\|\beta(t)\| \leq \rho$ para todo $t \geq t_0 + T$.

De modo semelhante, dizemos que $\gamma(t) \equiv 0$ é *globalmente uniformemente exponencialmente estável* se a condição de convergência exponencial vale em bolas com raio δ arbitrariamente grande:

- (W) para todo $\delta > 0$ existem $C > 0$ e $c > 0$ tais que, para todo $t_0 > a$, toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ satisfaz $\|\beta(t)\| \leq Ce^{-ct}\|\beta(t_0)\|$ para todo $t \geq t_0$.

Observação 8.27. No caso da equação linear $x' = A(t)x$ as soluções dependem linearmente da condição inicial (Lema 7.3): $\beta(t) = \Gamma(t)\beta(t_0)$ onde Γ é a solução fundamental com condição inicial $\Gamma(t_0) = \text{Id}$. Então, a condição de atratividade (uniforme) vale numa bola $B_\delta(0)$ se e somente se ela vale em qualquer outra bola em torno da origem. Isto mostra que, no caso linear, estabilidade assintótica (uniforme) implica estabilidade assintótica (uniforme) global. Analogamente, estabilidade exponencial (uniforme) implica estabilidade exponencial (uniforme) global.

Corolário 8.28. *Suponha que existe uma função de Lyapunov estrita dominada $V : (a, +\infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e que podemos escolher a função V_0 em (8.28) com $V_0(x)$ indo para infinito quando $\|x\| \rightarrow +\infty$. Então a solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração. Como $U_0 = \mathbb{R}^d$, podemos considerar $\epsilon \rightarrow +\infty$. Então, a constante $\tau > 0$ em (8.31) também vai para infinito. Segue que a constante $\delta > 0$ em (8.33) pode ser tomada arbitrariamente grande. Logo, a segunda parte da demonstração do Teorema 8.28 permanece válida em bolas com raio arbitrariamente grande. \square

O seguinte critério de estabilidade exponencial generaliza o Teorema 8.15. A demonstração fica a cargo do leitor (Exercício 8.12).

Teorema 8.29. *Suponha que existem constantes $a, b, c > 0$ e $p \geq 1$ e uma função $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que*

1. $a\|x\|^p \leq V(t, x) \leq b\|x\|^p$ para todo $(t, x) \in (a, +\infty) \times U_0$ e
2. $V'(t, x) \leq -c\|x\|^p$ para todo $x \in (a, +\infty) \times U_0$.

Então a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente exponencialmente estável. Além disso, se $U_0 = \mathcal{U} = \mathbb{R}^d$ então $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente uniformemente exponencialmente estável.

Teorema do Conjunto Invariante. Primeiramente, notemos que não existe análogo do Teorema 8.18 para equações não autônomas. Para entender isso, recorde que a formulação do Teorema 8.18 envolve um conjunto $Y_\rho = \{x : V(x) \leq \rho\}$ que seja relativamente compacto e tal que $V'(x) \leq 0$ para todo $x \in Y_\rho$. É claro que sempre podemos transformar a equação (8.1) numa equação autônoma, conforme descrito na Seção 5.1.3:

$$\begin{cases} s' = 1 \\ x' = F(s, x). \end{cases} \quad (8.34)$$

Acontece que para tais equações diferenciais as duas condições que mencionamos são incompatíveis. De fato, $V' \leq 0$ implica que se (s, x) é solução de (8.34) com condição inicial $(s(t_0), x(t_0)) \in Y_\rho$ então $(s(t), x(t)) \in Y_\rho$ para todo $t \geq t_0$. Note que $s(t) = s(t_0) + t - t_0$. Então, decorre do Corolário 3.6 que toda solução máxima de (8.34) é ilimitada, seja na variável s , se a solução está definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$, seja na variável x , caso contrário. Então, Y_ρ também é ilimitado e, em particular, não pode ser relativamente compacto. Isto mostra que equações da forma (8.34) nunca satisfazem a hipótese do Teorema 8.18.

Esta lacuna pode ser parcialmente compensada usando o Lema 8.20 (Lema de Barbalat). O exemplo a seguir ilustra esta possibilidade.

Exemplo 8.30. Seja $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada e considere a equação diferencial

$$\begin{cases} x' = -x + y\omega(t) \\ y' = -x\omega(t). \end{cases} \quad (8.35)$$

Observe que $V(t, x, y) = x^2 + y^2$ é uma função de Lyapunov: é claro que V é definida positiva (tome $V_0(x, y) = x^2 + y^2$) e a sua derivada

$$V'(t, x, y) = 2xx' + 2yy' = 2x(-x + y\omega) + 2y(-x\omega) = -2x^2 \quad (8.36)$$

é não positiva (tome $V_1(x, y) = -2x^2$). Também é claro que V é dominada: tome $W_0(x, y) = x^2 + y^2$. Logo, pelo Corolário 8.26, a solução $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ da equação (8.35) é uniformemente estável.

Seja $t \mapsto (x(t), y(t))$ uma solução máxima qualquer da equação e defina $\varphi(t) = V(t, x(t), y(t))$. Segue das observações anteriores que φ é de classe C^1 , decrescente e minorada por zero. Em particular, o limite de $\varphi(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$ existe e é finito. Segue de (8.36) que $\varphi'(t) = -2x(t)^2$. O fato de que $\varphi(t) \leq \varphi(t_0)$ para todo $t \geq t_0$ implica que $x(t)$ e $y(t)$ são ambos limitados no intervalo $[t_0, +\infty)$. Então,

$$\varphi''(t) = -4x(t)x'(t) = -4x(t)(-x(t) + y(t)\omega(t))$$

também é limitada em $[t_0, +\infty)$. Isto implica que φ' é uniformemente contínua no intervalo $[t_0, +\infty)$. Portanto, estamos nas condições do Lema 8.20 e podemos concluir que $\varphi'(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Em outras palavras, $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Também segue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ e, portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ existe e é finito. Em muitos casos (veja o Exercício 8.15) é possível mostrar que este limite é necessariamente zero e, portanto, a solução $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.

Instabilidade. A família de ideias que apresentamos na seção anterior também conduz a critérios úteis de *instabilidade*. No que segue, fornecemos dois exemplos. Continuamos usando U_0 para representar uma vizinhança da origem tal que $(a, +\infty) \times U_0$ está contido no domínio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+d}$ da função F .

Proposição 8.31. *Suponha que existe uma função $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que*

1. $V(t, 0) = 0$ para todo $t > a$ e $V(t_0, x) > 0$ para valores de x arbitrariamente perto de 0;
2. a derivada V' ao longo do fluxo é definida positiva.

Então a solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ não é estável.

A demonstração desta proposição fica a cargo do leitor (Exercício ??). Damos um exemplo em que este critério permite provar instabilidade mesmo quando o método da linearização não é conclusivo:

Exemplo 8.32. Considere a equação diferencial autônoma

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (8.37)$$

Considere a função $V(t, x, y) = x^2 + y^2$. Note que V é definida positiva e a sua derivada ao longo do fluxo também é definida positiva:

$$V'(t, x, y) = 2xx' + 2yy' = 2x(-y + x(x^2 + y^2)) + 2y(x + y(x^2 + y^2)) = 2(x^2 + y^2)^2.$$

Pela Proposição 8.31 segue que a trajetória $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é instável. Veja também o Exercício 8.11.

Uma variante do critério a seguir já foi utilizada na demonstração da Proposição 8.7:

Teorema 8.33 (Chetaev). *Suponha que existe uma função $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dominada de classe C^1 e existe uma região aberta Ω cujo fecho está contido em U_0 e contém 0, tais que*

- (i) V é definida positiva e dominada em $(a, +\infty) \times \Omega$;
- (ii) V' é definida positiva em $(a, +\infty) \times \Omega$;
- (iii) $V(t, x) = 0$ para todo $t > a$ e todo x no bordo de Ω .

Então a solução $\gamma(t) \equiv 0$ não é estável em nenhum tempo $t_0 > a$.

Demonstração. (Observe a Figura 8.6.) Fixe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que a bola fechada de raio ϵ em torno da origem esteja contida em U_0 . Por contradição, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é estável em algum tempo $t_0 > a$. Então, existe $\delta > 0$ tal que

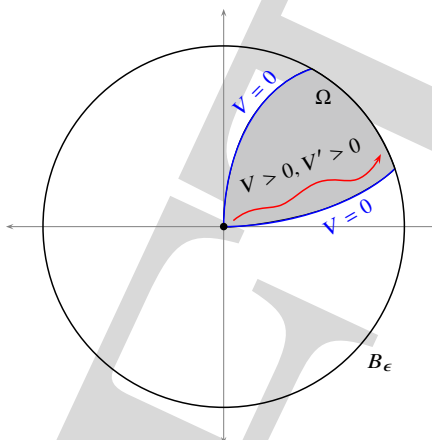


Figura 8.6: Critério de instabilidade de Chetaev.

toda solução máxima β com $\beta(t_0) \in B_\delta(0)$ satisfaz $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Por hipótese, existem funções definidas positivas V_0 , W_0 e V_1 tais que

$$W_0(x) \geq V(t, x) \geq V_0(x) \quad \text{e} \quad V'(t, x) \geq V_1(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ e todo } t > a.$$

Suponhamos que $\beta(t_0) \in \Omega \setminus \{0\}$. Então, como V' é positiva,

$$W_0(\beta(t)) \geq V(t, \beta(t)) \geq V(t_0, \beta(t_0)) \geq V_0(\beta(t_0)) > 0, \quad (8.38)$$

para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Em particular, pela hipótese (iii), a solução β não pode cruzar o bordo de Ω . Logo, $\beta(t) \in \Omega$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Seja Ω_0 o conjunto dos pontos $y \in \Omega$ tais que $W_0(y) \geq V_0(\beta(t_0))$. Note que Ω_0 é fechado e não contém a origem. Então, como V_1 é definida positiva, o número

$$\tau = \inf\{V_1(y) : y \in \Omega_0\}$$

é positivo. Além disso, (8.38) mostra que $\beta(t) \in \Omega_0$ para todo $t \geq t_0$. Então,

$$W_0(\beta(t)) \geq V(t, \beta(t)) = V(t_0, \beta(t_0)) + \int_{t_0}^t V'(s, \beta(s)) ds \geq V(t_0, \beta(t_0)) + \tau(t - t_0)$$

para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Como estamos supondo que $\beta(t) \in B_\epsilon(0)$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$, isto contradiz o fato de que a função W_0 (sendo contínua) é limitada na bola fechada de raio ϵ . Esta contradição prova que toda solução β com condição inicial $\beta(t_0) \in \Omega$ sai da bola de raio ϵ em torno da origem. Como a origem está no fecho de Ω , por hipótese, isto mostra que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é instável. \square

Teoria de Lyapunov recíproca. Finalmente, vale a pena observar que a existência de funções de Lyapunov é condição não apenas suficiente mas também necessária para a estabilidade das trajetórias. O resultado a seguir é uma ótima ilustração dessa *teoria de Lyapunov recíproca*:

Teorema 8.34. *Se a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é estável então existe função de Lyapunov $V : (a, +\infty) \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ em alguma vizinhança U_0 da origem. Além disso, se γ é uniformemente assintoticamente estável então a função de Lyapunov pode ser escolhida estrita e dominada.*

Não demonstraremos o Teorema 8.34 aqui: demonstrações deste e outros resultados com sabor similar podem ser encontradas no Capítulo VI do livro de Hahn [38]. Claro que o interesse deste tipo de resultados é muito mais teórico do que prático: embora a demonstração contenha uma construção da função de Lyapunov, esta é feita a partir das próprias soluções da equação, pelo que ela não é útil na grande maioria das aplicações concretas, nas quais as soluções da equação diferencial não são conhecidas. Mas do ponto de vista matemático é muito satisfatório saber que as ferramentas que vimos apresentando são as melhores possíveis, num sentido preciso.

8.4 Estabilidade linear e expoentes de Lyapunov

Continuamos considerando a equação geral de primeira ordem (8.1), reduzida ao caso em que $F(t, 0) = 0$ para todo t num certo intervalo $(a, +\infty)$. O objetivo desta seção é explicar como o método da linearização pode ser estendido a este contexto, sob certas condições.

Tal como no caso autônomo, o ponto de partida é a Fórmula de Taylor de ordem 1: escrevemos $F(t, x) = A(t)x + R(t, x)$ com

$$A(t) = \partial_x F(t, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{para todo } t > a. \quad (8.39)$$

Então (8.1) assume a forma

$$x' = A(t)x + R(t, x). \quad (8.40)$$

Suporemos que a função $t \mapsto A(t)$ é contínua no intervalo $(a, +\infty)$. Então, de acordo com o Lema 7.1, todas as soluções máximas da equação linear não autônoma

$$x' = A(t)x \quad (8.41)$$

estão definidas em $(a, +\infty)$. A partir daqui, o método da linearização contém duas etapas. A primeira é analisar a estabilidade da equação linear (8.41). A segunda é utilizar essa análise para descrever a estabilidade da equação quase linear (8.40). Discutiremos estes dois aspectos do problema no que resta deste capítulo.

8.4.1 Equações lineares

Para cada $t_0 > a$, represente por $t \mapsto \Gamma(t_0; t)$ a solução fundamental da equação diferencial linear (8.41) com condição inicial $\Gamma(t_0; t_0) = \text{Id}$. De acordo com o Lema 7.3, toda solução máxima β de (8.41) satisfaz

$$\beta(t) = \Gamma(t_0; t)\beta(t_0) \quad \text{para quaisquer } t_0 > a \text{ e } t > a. \quad (8.42)$$

Isto também implica que

$$\Gamma(t_0; t_2) = \Gamma(t_1; t_2)\Gamma(t_0; t_1) \text{ para quaisquer } t_0 > a, t_1 > a \text{ e } t_2 > a. \quad (8.43)$$

A proposição que apresentamos a seguir caracteriza o tipo de estabilidade da solução estacionária de (8.41) a partir do comportamento das soluções fundamentais. Em particular, ela mostra que, no caso linear, estabilidade assintótica uniforme é equivalente a estabilidade exponencial uniforme. Para equações autônomas esse fato já havia sido apontado na Observação 8.9 (lembre também da Observação 8.23). Recorde também que, no contexto linear, estas propriedades de estabilidade não dependem da solução (Observação 8.3) e são sempre globais (Observação 8.27).

Proposição 8.35. *A solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ da equação diferencial linear (8.41) é:*

(a) *estável se e somente se, para algum (e, portanto, para todo) $t_0 > a$*

$$\sup\{\|\Gamma(t_0; t)\| : t \geq t_0\} < \infty; \quad (8.44)$$

(b) *uniformemente estável se e somente se*

$$\sup\{\|\Gamma(t_0; t)\| : t \geq t_0 > a\} < \infty; \quad (8.45)$$

(c) *uniformemente assintoticamente estável se e somente se ela é uniformemente estável e*

$$\|\Gamma(t_0; t_0 + s)\| \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente em } t_0 > a; \quad (8.46)$$

(d) *uniformemente exponencialmente estável se e somente se ela é uniformemente estável e existem constantes $C > 0$ e $c > 0$ tais que*

$$\|\Gamma(t_0; t)\| \leq Ce^{-c(t-t_0)} \text{ para quaisquer } t \geq t_0 > a. \quad (8.47)$$

Além disso, as condições (c) e (d) são equivalentes: $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável se e somente se ela é uniformemente exponencialmente estável.

Demonstração. Fixe $t_0 > a$ e escreva $S(t_0) = \sup\{\|\Gamma(t_0; t)\| : t \geq t_0\}$. Pela relação (8.42), a condição (8.44) implica que $\|\beta(t)\| \leq S(t_0)\|\beta(t_0)\|$ para todo $t \geq t_0$. Segue que $\gamma(t) \equiv 0$ é estável pois,

$$\|\beta(t_0)\| \leq \delta \text{ implica } \|\beta(t)\| \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq t_0, \quad (8.48)$$

desde que tomemos $\delta = \epsilon/S(t_0)$. Reciprocamente, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é estável. Então podemos fixar $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que (8.48) é satisfeita para toda solução máxima β . Atentando mais uma vez para (8.42), segue que $\|\Gamma(t_0; t)\| \leq \epsilon/\delta$ para todo $t \geq t_0$. Portanto, $S(t_0) \leq \epsilon/\delta$. Isto demonstra o item (a).

Escreva $S = \sup\{\|\Gamma(t_0; t)\| : t \geq t_0 > a\}$. A condição (8.45) implica que $\|\beta(t)\| \leq S\|\beta(t_0)\|$ para todo $t \geq t_0 > a$. Segue que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente estável pois,

$$\|\beta(t_0)\| \leq \delta \text{ implica } \|\beta(t)\| \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq t_0 > a \quad (8.49)$$

desde que tomemos $\delta = \epsilon/S$. Reciprocamente, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente estável. Então podemos fixar $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que (8.49) é satisfeita para toda solução máxima β . Segue que $\|\Gamma(t_0; t)\| \leq \epsilon/\delta$ para todo $t \geq t_0 > a$. Portanto, $S \leq \epsilon/\delta$. Isto demonstra o item (b).

A condição (8.46) significa que para todo $\rho > 0$ existe $T > 0$ tal que $\|\Gamma(t_0; t)\| \leq \rho$ para todo $t \geq t_0 > a$ com $t - t_0 \geq T$. Pela relação (8.42), segue que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável pois,

$$\|\beta(t)\| \leq \rho \|\beta(t_0)\| \leq \rho \text{ para todo } t \geq t_0 > a \text{ com } t - t_0 \geq T$$

e toda solução máxima β com condição inicial $\beta(t_0) \in B_1(0)$. Reciprocamente, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável. Pela Observação 8.27, essa estabilidade é automaticamente global. Em particular, dado qualquer $\rho > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$\|\beta(t)\| \leq \rho = \rho \|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \geq t_0 > a \text{ com } t - t_0 \geq T$$

e toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in \partial B_1(0)$. Atendendo mais uma vez para (8.42), segue que $\|\Gamma(t_0; t)\| \leq \rho$ para todo $t \geq t_0 > a$ com $t - t_0 \geq T$. Isto demonstra o item (c).

É claro que a condição (8.47), juntamente com a relação (8.42), implica que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente exponencialmente estável pois,

$$\|\beta(t)\| \leq \|\Gamma(t; t_0)\| \|\beta(t_0)\| \leq C e^{-c(t-t_0)} \|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \geq t_0 > a$$

e toda solução máxima β . Reciprocamente, suponha que $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente exponencialmente estável. Pela Observação 8.27, essa estabilidade é global. Em particular,

$$\|\beta(t)\| \leq C e^{-c(t-t_0)} \|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \geq t_0 > a.$$

e toda solução máxima com condição inicial $\beta(t_0) \in \partial B_1(0)$. Por (8.42), segue que $\|\Gamma(t_0; t)\| \leq C e^{-c(t-t_0)}$ para todo $t \geq t_0 > a$. Isto demonstra o item (d).

É claro que (8.47) implica (8.46). Portanto, para terminar a demonstração da proposição basta provar que (8.46) implica (8.47). A hipótese (8.46) implica que existe $T > 0$ tal que

$$\|\Gamma(t_0; t)\| \leq e^{-1} \text{ para todo } t \geq t_0 > a \text{ com } t - t_0 \geq T. \quad (8.50)$$

Dados quaisquer $t \geq t_0 > a$, seja $k \geq 0$ o número inteiro tal que $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$. Pela relação (8.43),

$$\Gamma(t_0; t) = \Gamma(t - T; t) \cdot \Gamma(t - 2T, t - T) \cdots \Gamma(t_0, t - (k-1)T).$$

Aplicando a desigualdade (8.50) a cada um dos k fatores neste produto, segue que $\|\Gamma(t_0; t)\| \leq e^{-k}$. Agora, a escolha de k implica que $k > (t - t_0)/T - 1$. Portanto,

$$\|\Gamma(t_0; t)\| \leq e^{-(t-t_0)/T+1} = C e^{-c(t-t_0)}$$

com $C = e$ e $c = 1/T$. Isto dá (8.47) e, portanto, completa a demonstração. \square

A Proposição 8.35 tem interesse conceitual, porque ajuda a entender os mecanismos que conduzem à estabilidade ou instabilidade de equações lineares. Mas ela tem pouca utilidade prática, uma vez que em geral não conhecemos as soluções fundamentais da equação diferencial. Na verdade, na prática a análise da estabilidade da equação linear não autônoma é bem mais delicada do que no caso autônomo. Para começar, não basta atentar para os autovalores das aplicações lineares $A(t)$:

Exemplo 8.36. Considere a equação linear não autônoma

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + e^{2t}x \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ e^{2t} & -1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $A(t)$ são negativos, iguais a -1 , para todo $t \in \mathbb{R}$. No entanto, a solução $\gamma(t) \equiv 0$ da equação é instável. Para comprovar esta última afirmação basta observar que a expressão geral das soluções é

$$x(t) = x_0 e^{-t} \quad \text{e} \quad y(t) = y_0 e^{-t} + x_0 e^t$$

e que, de acordo com esta expressão, $|y(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que $x_0 \neq 0$.

No que segue, vamos descrever um critério útil de estabilidade e de estabilidade assintótica da solução estacionária da equação diferencial linear (8.41) chamado *método da equação matricial de Lyapunov*. Lembre que se P é uma matriz simétrica (real) de dimensão $d \geq 1$ então todos os seus autovalores são números reais. Além disso, o espaço \mathbb{R}^d admite uma base ortonormada formada por autovetores de P . Esta última propriedade implica que

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq Px \cdot x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d, \quad (8.51)$$

onde $\lambda_{\min}(P)$ designa o menor autovalor e $\lambda_{\max}(P)$ designa o maior autovalor de P .

Considere a função $V : (a, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ a função definida por $V(t, x) = Px \cdot x$ onde P é uma matriz simétrica definida positiva, isto é, tal que $\lambda_{\min}(P) > 0$. Então a função V é definida positiva e dominada:

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad \text{para todo } (t, x) \in (a, +\infty) \times \mathbb{R}^d.$$

Além disso, a derivada ao longo do fluxo está dada por

$$V'(t, x) = Px' \cdot x + Px \cdot x' = PA(t)x \cdot x + Px \cdot A(t)x = PA(t)x \cdot x + A(t)^*Px \cdot x,$$

onde $A(t)^*$ representa a transposta de $A(t)$. Defina $Q(t) = PA(t) + A(t)^*P$ para cada $t > a$. Note que a matriz $Q(t)$ é simétrica:

$$Q(t)^* = (PA(t) + A(t)^*P)^* = A(t)^*P^* + P^*A(t)^{**} = A(t)^*P + PA(t) = Q(t),$$

uma vez que P é simétrica (e que a transposta da transposta é a própria matriz).

Dizemos que a função matricial $t \mapsto Q(t)$ é *não positiva* se $\lambda_{\max}(Q(t)) \leq 0$ para todo $t > a$. Então a derivada V' é não positiva

$$V'(t, x) = Q(t)x \cdot x \leq \lambda_{\max}(Q(t))\|x\|^2 \leq 0 \quad \text{para todo } (t, x) \in (a, +\infty) \times \mathbb{R}^d$$

e, portanto, V é uma função de Lyapunov dominada para (8.41). Então, pelo Teorema 8.26, a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente estável.

Dizemos que a função $t \mapsto Q(t)$ é *definida negativa* se existe $c > 0$ tal que $\lambda_{\max}(Q(t)) \leq -c$ para todo $t > a$. Então a derivada V' é definida negativa

$$V'(t, x) = Q(t)x \cdot x \leq \lambda_{\max}(Q(t))\|x\|^2 \leq -c\|x\|^2 \text{ para todo } (t, x) \in (a, +\infty) \times \mathbb{R}^d$$

e, portanto, V é uma função de Lyapunov estrita dominada para (8.41). Pelo Teorema 8.26, segue que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente estável. Combinando esta conclusão com a Proposição 8.35 e a Observação 8.27 obtemos que $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente uniformemente exponencialmente estável.

Resumimos estas conclusões na seguinte proposição:

Proposição 8.37. *Se existe alguma matriz simétrica definida positiva P tal que a função $t \mapsto Q(t) = PA(t) + A(t)^*P$ é não positiva então $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente estável. Se a função $t \mapsto Q(t)$ é definida negativa então $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente uniformemente exponencialmente estável.*

Exemplo 8.38. Se $\phi, \psi : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $|\phi(t) + \psi(t)| \leq 2$ para todo $t > a$ então a solução $\gamma(t) \equiv 0$ da equação diferencial linear

$$\begin{cases} x' = -x + \phi(t)y \\ y' = -y + \psi(t)x \end{cases} \quad (8.52)$$

é uniformemente estável. Para ver isso, note que neste caso

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & \phi(t) \\ \psi(t) & -1 \end{pmatrix}$$

e, portanto, tomando $P = \text{Id}$ obtemos

$$Q(t) = A(t) + A(t)^* = \begin{pmatrix} -2 & \phi(t) + \psi(t) \\ \phi(t) + \psi(t) & -2 \end{pmatrix}.$$

A hipótese garante que os autovalores de $Q(t)$ são negativos para todo t e, portanto, podemos aplicar a primeira parte da Proposição 8.37.

Se supusermos que $\sup\{|\phi(t) + \psi(t)| : t > a\}$ é menor que 2 então os autovalores de $Q(t)$ estão afastados de zero e, pela segunda parte da Proposição 8.37, a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente uniformemente exponencialmente estável.

Concluimos com mais duas classes de exemplos em que a estabilidade pode ser verificada facilmente:

Exemplo 8.39 (Coeficientes assintoticamente constantes). Suponha que $A(t) = A_0 + A_1(t)$ para todo $t \in (a, +\infty)$, onde A_0 é um atrator hiperbólico e $\|A_1(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Então a solução $\gamma(t) \equiv 0$ de (8.41) é globalmente exponencialmente estável. Isto pode ser visto da seguinte forma. De acordo com a Observação 8.4, podemos supor que A_0 está na Forma Canônica de Jordan. Então, tal como no Lema 6.19, existe $c > 0$ tal que

$$A_0 x \cdot x \leq -2c\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Então, como $\|A_1(t)\| \rightarrow 0$ quando t vai para infinito, existe $b \geq a$ tal que

$$A(t)x \cdot x \leq -c\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e todo } t > b.$$

De modo inteiramente análogo a (8.12)-(8.14) na demonstração da Proposição 8.7, segue que

$$\|\beta(t)\| \leq e^{-c(t-t_0)}\|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \geq t_0 > b$$

e toda solução máxima β . Isto prova que $\gamma(t) \equiv 0$ é (globalmente) uniformemente exponencialmente estável no domínio $(b, +\infty)$. Pelo Exercício ??, isto implica que $\gamma(t) \equiv 0$ é (globalmente) exponencialmente estável em todo o domínio $(a, +\infty)$.

Exemplo 8.40 (Coeficientes periódicos). Suponha que $t \mapsto A(t)$ é contínua e T -periódica para algum $T > 0$ e seja $t \mapsto \Gamma(t)$ uma solução fundamental qualquer de (8.41). Pelo Teorema de Floquet (Teorema 7.14), existem uma matriz complexa B e uma função contínua T -periódica $t \mapsto C(t)$ com valores no espaço das matrizes complexas tais que

$$\Gamma(t) = C(t)e^{tB}.$$

Suponha que B é um atrator hiperbólico. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e qualquer solução $\beta(t) = \Gamma(t)x$, temos que

$$\|\beta(t)\| = \left\| [C(t)e^{(t-t_0)B}C(t_0)^{-1}]C(t_0)e^{t_0B}x \right\| = \left\| [C(t)e^{(t-t_0)B}C(t_0)^{-1}]\beta(t_0) \right\|.$$

Como a função $t \mapsto C(t)$ é contínua e periódica e a matriz $C(t)$ é sempre invertível, existe $L > 0$ tal que $\|C(t)\| \leq L$ e $\|C(t)^{-1}\| \leq L$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A hipótese de que B é um atrator hiperbólico implica que existem $M > 0$ e $c > 0$ tais que $\|e^{sB}\| \leq Me^{-cs}$ para todo $s \geq 0$. Segue que

$$\|\beta(t)\| \leq L^2Me^{-c(t-t_0)}\|\beta(t_0)\| \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Isto mostra que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente uniformemente exponencialmente estável.

8.4.2 Equações quase lineares

Em seguida vamos relacionar a estabilidade da equação (8.40) com a estabilidade da equação linear (8.41). Para isso, precisamos de duas hipóteses adicionais. A primeira delas é que a função $t \mapsto A(t)$ é limitada:

$$\sup \{ \|A(t)\| : t \in (a, +\infty) \} < \infty. \quad (8.53)$$

A segunda é que o termo de resto $R(t, x)$ da Fórmula de Taylor satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sup \left\{ \frac{\|R(t, x)\|}{\|x\|} : t > a \right\} = 0. \quad (8.54)$$

Então dizemos que (8.41) é a *linearização* da equação (8.1). Observe que tanto (8.53) quanto (8.54) valem automaticamente quando a equação é autônoma.

O Exercício 8.1 mostra que, mesmo no caso autônomo, quando a estabilidade da equação linear é apenas *marginal*, ou seja não assintótica, o método da linearização é inconclusivo: a equação quase linear tanto pode ser estável (até assintoticamente estável) como instável. Portanto, a pergunta central desta teoria é: *estabilidade assintótica para a equação linear implica, ou não, estabilidade (assintótica?) para a equação quase linear?*

No caso autônomo a resposta é afirmativa, conforme ressaltamos na Observação 8.9. Mas resulta que isso não é mais verdade no caso geral não autônomo: exibiremos um contraexemplo na próxima seção (Exemplo 8.43). No entanto, o teorema que enunciaremos a seguir afirma que a resposta continua sendo afirmativa, em geral, se supusermos que a estabilidade assintótica é *uniforme*. Lembre (Proposição 8.35) que no caso de equações diferenciais lineares estabilidade assintótica uniforme é equivalente a estabilidade exponencial uniforme.

Teorema 8.41. *Suponha que valem as condições (8.53) e (8.54). Se a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é uniformemente assintoticamente (ou uniformemente exponencialmente) estável para a linearização (8.41) então ela é uniformemente exponencialmente estável para a equação quase linear (8.40).*

O leitor pode encontrar uma demonstração do Teorema 8.41 no livro de Vidyasaagar [137] (Teorema 15 na Seção 5.5). O exemplo a seguir mostra que a condição (8.54) não pode ser omitida no enunciado.

Exemplo 8.42. Considere a seguinte equação diferencial no domínio $\mathcal{U} = (-1, +\infty) \times \mathbb{R}$:

$$x' = -x + tx^2. \quad (8.55)$$

É claro que ela não satisfaz a condição (8.54). Observe que $A(t) \equiv -1$ e, portanto, $\gamma(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável para a respectiva equação linear $x' = A(t)x$. Aliás, como se trata de uma equação linear autônoma, essa estabilidade exponencial é automaticamente global e uniforme (Observações 8.27 e 8.23). O comportamento da solução estacionária para a equação quase linear é bastante diferente: afirmamos que $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável mas não é uniformemente estável para (8.55).

Para ver que assim é, comece por notar que a mudança de variável $y = e^t x$ transforma (8.55) em

$$y' = e^{-t} t y^2,$$

que é uma equação com variáveis separáveis. Usando esta observação, obtemos que as soluções não nulas de (8.55) têm a forma

$$x(t) = \frac{1}{1 + t + ce^t}$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Segue desta expressão que (veja também a Figura 8.7):

1. se $x(t_0) < 0$ então $c < 0$ e a solução $x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$; além disso, ela é crescente e converge para 0 quando $t \rightarrow +\infty$;
2. se $0 < x(t_0) \leq 1/(1 + t_0)$ então $c \geq 0$ e a solução $x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$; além disso ela é decrescente e converge para 0 quando $t \rightarrow +\infty$;

3. se $x(t_0) > 1/(1+t_0)$ então $c < 0$ e $x(t)$ vai para infinito em tempo finito (a solução máxima não está definida para todo $t \geq t_0$).

As duas primeiras propriedades garantem que $\gamma(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável. A terceira implica que ela não é sequer uniformemente estável.

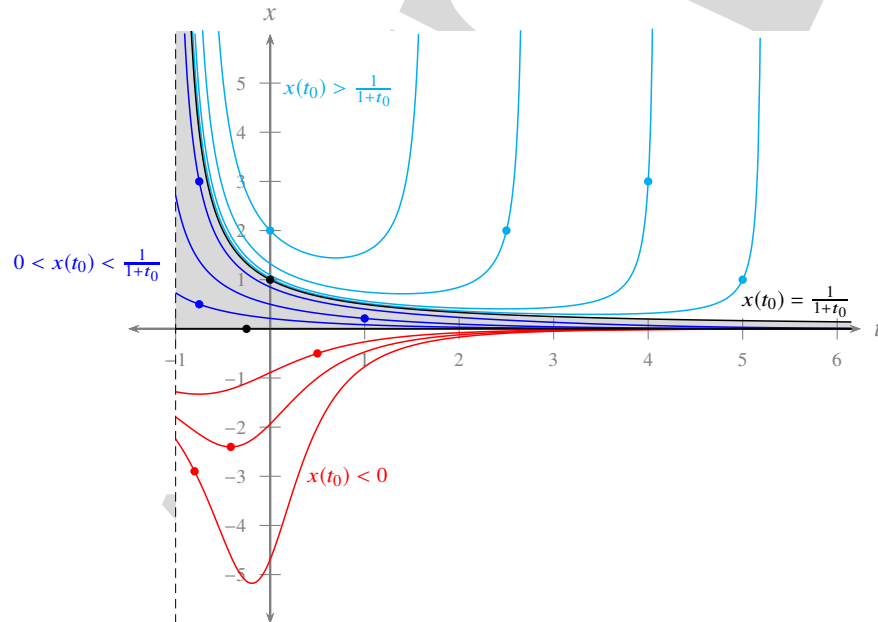


Figura 8.7: A solução nula não é uniformemente estável para a equação quase linear (8.55), apesar de ser uniformemente exponencialmente estável para a sua linearização.

8.4.3 Expoentes de Lyapunov

Nesta seção voltamos à questão central formulada na seção anterior – *estabilidade assintótica (ou exponencial) para a equação linear implícita, ou não, estabilidade para a equação quase linear?* – de um ângulo diferente, que remonta ao trabalho de Lyapunov e que tem muitas outras aplicações.

Nó que segue, mantemos a condição (8.53) e também supomos que existem constantes $C > 0$ e $q > 1$ e uma vizinhança U_0 da origem com $(a, +\infty) \times U_0 \subset \mathcal{U}$ e tal que $\|R(t, x) - R(t, y)\| \leq C\|x - y\|^q$ e

$$\|R(t, x)\| \leq C\|x\|^q \text{ para todo } t \in (a, +\infty) \text{ e quaisquer } x, y \in U_0. \quad (8.56)$$

É claro que esta última condição implica (8.54).

O ingrediente fundamental é a *função expoente de Lyapunov* $x \mapsto \lambda(x)$ da equação (8.41), a qual é definida da seguinte forma:

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_x(t)\| \quad (8.57)$$

onde ϕ_x representa a solução da equação linear (8.41) com condição inicial $\phi_x(t_0) = x$. A condição (8.53) assegura que a função $(t, x) \mapsto A(t)x$ é globalmente lipschitziana em x , com constante de Lipschitz $C = \sup\{\|A(t)\| : t > a\}$. Então, o Teorema 3.8 dá que

$$\|\phi_x(t)\| \leq e^{C(t-t_0)} \|\phi_x(t_0)\| \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Consequentemente, $\lambda(x) \leq C < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esta função é muito útil no presente contexto porque ela caracteriza a estabilidade exponencial da solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ de (8.41). De fato, é claro da definição que $\phi_x(t)$ converge exponencialmente para zero se e somente se $\lambda(x) < 0$. Portanto, $\gamma(t) \equiv 0$ é (globalmente) exponencialmente estável se e somente se

$$\sup\{\lambda(x) : x \in \mathbb{R}^d\} < 0. \quad (8.58)$$

Observe que $\phi_x(t) = \Gamma(t)x$, onde $\Gamma(t)$ representa a solução fundamental da equação linear (8.41) com condição inicial $\Gamma(0) = \text{Id}$. Não é difícil deduzir (Exercício 8.20) que a função expoente de Lyapunov tem as seguintes propriedades:

1. $\lambda(0) = -\infty$
2. $\lambda(cx) = \lambda(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e todo número real $c \neq 0$.
3. $\lambda(x + y) \leq \lambda(x) + \lambda(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Estas propriedades implicam que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) \leq a\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^d para todo $a \in \mathbb{R}$. Como a dimensão deste subespaço é um número inteiro entre 0 e d , segue que a função λ só pode tomar um número finito $k \leq d$ de valores. Representaremos por $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ esses valores: eles são chamados *expoentes de Lyapunov* da equação (8.41). Então, a caracterização (8.58) da estabilidade exponencial pode ser reformulada como $\lambda_1 < 0$.

Portanto, a pergunta central que formulamos acima corresponde a saber se a condição $\lambda_1 < 0$ também garante a estabilidade (exponencial) da solução $\gamma(t) \equiv 0$ para a equação quase linear (8.40). Lyapunov provou que assim é, se fizermos uma hipótese adicional sobre a equação linear (8.41), que chamamos *regularidade no sentido de Lyapunov*. Posteriormente, Perron deu um exemplo mostrando que em geral a resposta é negativa. Portanto, a hipótese de regularidade não pode ser omitida no teorema de Lyapunov.

Vamos começar por apresentar o contraexemplo de Perron. Posteriormente, daremos as formulações precisas da noção de regularidade e do Teorema de Lyapunov.

Exemplo 8.43 (Perron). Considere a equação diferencial em $\mathcal{U} = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = -(\omega + \rho\phi(t))x \\ y' = -(\omega - \rho\phi(t))y + |x|^{1+\tau} \end{cases} \quad (8.59)$$

onde $\phi(t) = \sin \log t + \cos \log t$ e ω, ρ e τ são constantes positivas tais que

$$\omega > \rho \quad \text{e} \quad \frac{2\rho}{\omega - \rho} > e^\pi \quad \text{e} \quad 0 < \tau < \frac{2\rho}{\omega - \rho} - e^\pi \quad (8.60)$$

(por exemplo, $\omega = 2$, $1 = \rho = 2$ e $\tau = 2$). Note que a equação linear associada é

$$\begin{cases} x' = -(\omega + \rho\phi(t))x \\ y' = -(\omega - \rho\phi(t))y \end{cases} \quad (8.61)$$

e que as condições (8.53) e (8.54) são satisfeitas, com $q = 1 + \tau$ (note que a função ϕ é limitada). Vamos argumentar que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável para a linearização (8.61) mas não é estável para (8.59).

Note que cada uma das equações em (8.61) envolve apenas uma das variáveis x ou y . Trata-se, portanto, de duas equações lineares homogêneas de ordem 1. Aplicando o método da separação das variáveis (lembre do Exemplo 1.4) a cada uma destas equações, obtemos que as soluções da linearização (8.61) são as curvas da forma

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-(\omega + \rho \text{sen } \log t)t} \\ y(t) = \beta e^{-(\omega - \rho \text{sen } \log t)t} \end{cases} \quad (8.62)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. É fácil deduzir que $\lambda(x, y) = -\omega + \rho$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (e todo tempo inicial $t_0 \in \mathbb{R}$). Portanto, a primeira parte de (8.60) garante que todos os expoentes de Lyapunov são negativos e, portanto, a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é exponencialmente estável para (8.61).

A expressão de $x(t)$ em (8.62) permanece válida para a equação quase linear, uma vez que a primeira equação em (8.59) coincide com a primeira equação em (8.61) e só envolve a variável x . Substituindo esta expressão na segunda equação em (8.59), obtemos

$$y' = -(\omega - \rho\phi(t))y + |\alpha|^{1+\tau} e^{-(1+\tau)(\omega + \rho \text{sen } \log t)t}$$

que é uma equação linear não homogênea de primeira ordem. Combinando o método da separação das variáveis com o método da variação da constante (Seção 7.4) para resolver esta equação, concluímos que as soluções de (8.59) são as curvas da forma

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-(\omega + \rho \text{sen } \log t)t} \\ y(t) = \beta e^{-(\omega - \rho \text{sen } \log t)t} + \alpha^2 e^{-(\omega - \rho \text{sen } \log t)t} \int_1^t e^{-(2+\tau)\rho s \text{sen } \log s - \omega \tau s} ds \end{cases} \quad (8.63)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para cada inteiro $k \geq 1$, defina $t_k = 2k\pi + \pi/2$. Afirmamos que existem $b > \omega - \rho$ e $c > 0$ tais que

$$\int_1^{t_k} e^{-(2+\tau)\rho s \text{sen } \log s - \omega \tau s} ds \geq c e^{bt_k} \quad \text{para todo } k \geq 1. \quad (8.64)$$

De fato, a última parte de (8.60) é equivalente a $(2 + \tau)\rho - \omega\tau > e^\pi(\omega - \rho)$. Então, podemos fixar $\delta > 0$ tal que o número

$$b = e^{-\pi}((2 + \tau)\rho \cos \delta - \omega\tau)$$

é maior que $\omega - \rho$. Defina $r_k = e^{2k\pi - \pi/2}$ e $s_k = e^{2k\pi - \pi/2 + \delta}$. Note que $-\text{sen } \log s \geq \cos \delta$ para todo $s \in [r_k, s_k]$. Portanto,

$$\int_{r_k}^{s_k} e^{-(2+\tau)\rho s \text{sen } \log s - \omega \tau s} ds \geq \int_{r_k}^{s_k} e^{(2+\tau)\rho s \cos \delta - \omega \tau s} ds = \int_{r_k}^{s_k} e^{e^\pi b s} ds = c e^{e^\pi b r_k},$$

onde $c = (e^\delta - 1)/(e^\pi b)$. Então, como $[r_k, s_k] \subset [1, t_k]$,

$$\int_1^{t_k} e^{-(2+\tau)\rho s} \operatorname{sen} \log s - \omega\tau s \, ds \geq \int_{r_k}^{s_k} e^{-(2+\tau)\rho s} \operatorname{sen} \log s - \omega\tau s \, ds \geq c e^{e^\pi b r_k} = c e^{b t_k}.$$

Isto prova a afirmação (8.64).

Finalmente, tomando $\beta = 0$ em (8.63), obtemos que

$$\begin{aligned} y(t_k) &= \alpha^2 e^{-(\omega-\rho) \operatorname{sen} \log t_k} \int_1^{t_k} e^{-(2+\tau)\rho s} \operatorname{sen} \log s - \omega\tau s \, ds \\ &\geq \alpha^2 e^{-(\omega-\rho)t_k} c e^{b t_k} = c \alpha^2 e^{(b+\rho-\omega)t_k} \end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$. Como a expressão do lado direito desta desigualdade vai para infinito quando $k \rightarrow +\infty$, qualquer que seja $\alpha \neq 0$, isto mostra que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ não é estável para a equação quase linear (8.59).

Também é possível construir exemplos em que existem expoentes de Lyapunov positivos e, no entanto, a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é estável para a equação quase linear. Falamos de *efeito de Perron* para nos referirmos a situações como essa, ou do tipo descrito no Exemplo 8.43, em que a estabilidade da solução vai em sentido contrária ao que os expoentes de Lyapunov indicariam.

Lembre que representamos por $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ os expoentes de Lyapunov, ou seja, os valores da função $x \mapsto \lambda(x)$. Para cada $i = 1, \dots, k$ denotemos $V_i = \{x \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) \leq \lambda_i\}$ e seja $d_i = \dim V_i$. Por convenção, $d_{k+1} = 0$. Cada diferença $m_i = d_i - d_{i+1}$ é chamada *multiplicidade* do expoente de Lyapunov λ_i . Note que $m_1 + \dots + m_k = d$.

Dizemos que a equação linear $x' = A(t)x$ é *regular no sentido de Lyapunov* se para alguma solução fundamental $t \mapsto \Gamma(t)$ vale que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |\det \Gamma(t)| = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i. \quad (8.65)$$

Pela fórmula de Liouville–Ostrogradskii (Teorema 7.5), isto pode ser formulado diretamente em termos de $t \mapsto A(t)$: a igualdade (8.65) é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \log \operatorname{tr} A(s) \, ds = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i. \quad (8.66)$$

Teorema 8.44 (Lyapunov). *Suponha que valem as condições (8.53) e (8.56) e que a linearização (8.41) é regular no sentido de Lyapunov. Então $\lambda_1 < 0$ implica que a solução $\gamma \equiv 0$ é exponencialmente estável para a equação quase linear (8.40).*

Dada uma solução qualquer $\gamma(t)$ da equação geral $x' = F(t, x)$, podemos definir $G(t, x) = F(t, x + \gamma(t)) - \gamma'(t)$. Como vimos no início da Seção 8.3, $\gamma(t)$ corresponde à solução estacionária nula da equação $x' = G(t, x)$. Em seguida, podemos escrever $G(t, x) = A(t) + R(t, x)$, com

$$A(t) = \partial_x G(t, 0) = \partial_x F(t, \gamma(t)).$$

Então, supondo que $A(t)$ e $R(t, x)$ satisfazem as condições (8.53) e (8.54), definimos a *função expoente de Lyapunov* da solução $\gamma(t)$ de $x' = F(t, x)$ como sendo a função expoente de Lyapunov $\lambda(x)$ da linearização $x' = A(t)x$, dada por (8.57). Além disso, dizemos que $\gamma(t)$ é regular no sentido de Lyapunov se a linearização $x' = A(t)x$ é regular no sentido de Lyapunov.

É importante manter em mente que a função expoente de Lyapunov depende da solução γ . Em geral, essa dependência é muito delicada. Por exemplo, pode-se mostrar que no exemplo de Perron (Exemplo 8.43) existem soluções com condições iniciais arbitrariamente próximas de zero que exibem expoentes de Lyapunov positivos.

8.5 Experimento: maior expoente de Lyapunov

A teoria apresentada na Seção 8.4.3 mostra que, sob certas condições (regularidade no sentido de Lyapunov), a estabilidade de uma solução $\gamma(t)$ da equação diferencial (8.1) pode ser analisada por meio do maior expoente de Lyapunov, ou seja, do valor máximo λ_1 da função

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\phi_x(t)\|,$$

onde $\phi_x(t)$ representa a solução da linearização

$$x' = A(t)x, \quad A(t) = \partial_x F(t, \gamma(t))$$

com condição inicial $\phi_x(t_0) = x$.

Como sabemos (lembre das Observações 2.25 e 2.29) a função $\phi_x(t)$ corresponde à derivada das soluções da equação diferencial com relação à condição inicial: se representarmos por $\beta_z(t)$ a solução de $x' = F(t, x)$ com condição inicial $\beta_z(t_0) = z$ então $\phi_x(t)$ é a derivada da aplicação $z \mapsto \beta_z(t)$ calculada no ponto $z = \gamma(t_0)$ e na direção do vetor x . Grosseiramente falando, isto quer dizer que

$$\|\beta_{\gamma(t_0)+x}(t) - \gamma(t)\| \approx e^{t\lambda(x)} \|x\|$$

se x está próximo de zero. Portanto, podemos pensar nos valores de $\lambda(x)$ como sendo as taxas exponenciais com que soluções próximas se afastam (ou se aproximam) de γ quando o tempo t vai para infinito. Em particular, λ_1 é a taxa máxima de afastamento.

Esta observação sugere o método simples para calcular λ_1 que vamos descrever a seguir. Para maior clareza, tratamos primeiro o caso de transformações diferenciáveis, no lugar de equações diferenciais. Além disso, começamos por considerar o caso em que a transformação $g : U \rightarrow U$ está definida em dimensão 1, ou seja, em que U é um aberto de \mathbb{R} .

Sejam x_0 e $x_0 + \Delta x_0$ duas condições iniciais vizinhas. A separação entre as respectivas trajetórias após uma iteração é

$$\Delta x_1 = g(x_0 + \Delta x_0) - g(x_0) \approx \Delta x_0 g'(x_0).$$

É usual *número de Lyapunov* ao quociente $|\Delta x_1 / \Delta x_0|$ e *expoente de Lyapunov local* ao respectivo logaritmo $\lambda_{loc} = \log(|\Delta x_1 / \Delta x_0|)$. Então podemos estimar o expoente de

Lyapunov λ_1 tomando a média temporal dos expoentes de Lyapunov locais ao longo da trajetória

$$\lambda_1 \approx \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left| \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta x_j} \right|. \quad (8.67)$$

Em dimensão $d > 1$, a função expoente de Lyapunov pode assumir mais que um valor. Então, o método que acabamos de esboçar pode conduzir a outros expoentes de Lyapunov, se a diferença Δx_0 entre as condições iniciais estiver alinhada em uma direção x com $\lambda(x) < \lambda_1$. No entanto, esta preocupação não é muito relevante na prática pois essa situação só pode ocorrer para escolhas muito particulares de Δx_0 . Isso é porque, como vimos na Seção 8.4.3, o conjunto dos x tais que $\lambda(x) < \lambda_1$ é um subespaço estrito (e, portanto, um subconjunto “pequeno”) de \mathbb{R}^d . Então, o método do parágrafo anterior estende-se para transformações em qualquer dimensão, desde que tomemos a precaução² de garantir que a escolha de Δx_0 não corresponde a uma dessas situações particulares. O cálculo dos demais expoentes de Lyapunov é mais delicado, mas não será discutido aqui.

Finalmente, esta abordagem pode ser adaptada facilmente de transformações $x \mapsto g(x)$ para equações diferenciais $x' = F(t, x)$ discretizando o tempo. Como a grande maioria dos métodos de integração numérica já envolve mesmo a discretização do tempo, o cálculo do expoente de Lyapunov pode ser incorporado de maneira muito natural ao próprio cálculo das soluções. Por exemplo, no método de Euler $x_{n+1} = x_n + F(t_n, x_n)h$, o número de Lyapunov e o expoente local de Lyapunov podem ser calculados a partir da relação

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 + [F(t_0, x_0 + \Delta x_0) - F(t_0, x_0)]h.$$

Repetindo este cálculo ao longo da trajetória dada pelo método de Euler, podemos então estimar o expoente de Lyapunov por meio da relação

$$\lambda_1 \approx \lim_n \frac{1}{nh} \sum_{j=0}^{n-1} \log \left| \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta x_j} \right|. \quad (8.68)$$

Note que o passo de tempo h está incorporado no denominador.

Vamos ilustrar estas ideias estudando os expoentes de Lyapunov do *oscilador não linear de Duffing*:

$$x'' + \delta x' + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (8.69)$$

Para $\beta > 0$, esta equação é uma generalização do oscilador harmônico periodicamente forçado (7.23), com termo de elasticidade $\beta x + \alpha x^3$ não linear: se $\alpha > 0$, o coeficiente de elasticidade $\beta + \alpha x^2$ aumenta (a mola fica mais “forte”) quando o deslocamento x aumenta; se $\alpha < 0$, a mola fica mais “fraca” quando o deslocamento aumenta, pelo menos para valores de x próximos de 0.

O caso $\beta < 0$ também tem aplicações interessantes, conforme ilustra a Figura 8.8. Uma viga fina (flexível) de aço está sob o efeito da atração de dois ímãs colocados em

²Um modo de fazer isso na prática é testar d valores linearmente independentes de Δx_0 e escolher a maior entre as estimativas obtidas para o expoente de Lyapunov.

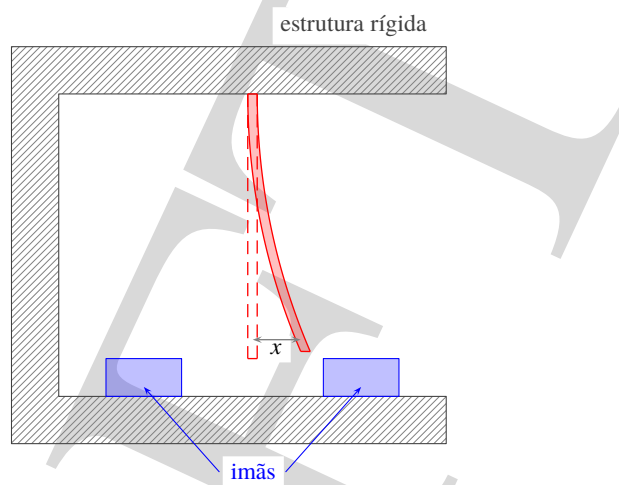


Figura 8.8: O sistema formado por uma viga flexível de aço sob a ação de dois ímãs e forçada periodicamente pode ser modelado pela equação de Duffing (8.69) com $\beta < 0$.

posições simétricas em relação à viga. Na ausência de ação exterior, o sistema tem duas posições de equilíbrio estável, com a ponta da viga próxima de cada um dos dois ímãs. Existe mais uma posição de equilíbrio, instável, com a viga exatamente na posição média entre os dois ímãs, de tal forma que as duas atrações se anulam mutuamente. Este sistema pode ser modelado por meio de uma força da forma $F(x) = bx - ax^3$ com $a, b > 0$. Então, a 2ª lei de Newton dá que

$$mx'' - bx - ax^3 = 0,$$

que é precisamente a forma do oscilador de Duffing com $\delta = \gamma = 0$ e $\beta < 0$. O termo adicional $\delta x'$ em (8.69) modela o amortecimento, tanto mecânico (resistência do ar) quanto magnético. Para completar, submetemos o sistema à ação de de um gerador eletromagnético de vibrações, que é modelado pelo termo $\gamma \cos(\omega t)$.

Objetivos:

1. Escreva, em código do MATLAB/Octave ou outro ambiente computacional, um roteiro que calcule o maior expoente de Lyapunov λ_1 da solução da equação diferencial $x' = F(t, x)$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$. Acompanhe o valor aproximado de λ_1 obtido em cada iteração e avalie a convergência do método. Note que a convergência para aproximações de alta precisão é lenta mas isso não representa um problema para avaliar a estabilidade de um sistema.
2. Estude numericamente o maior expoente de Lyapunov da equação de Duffing, para diferentes condições iniciais, visando identificar regiões de estabilidade ($\lambda_1 < 0$) e de "caos" ($\lambda_1 > 0$). Considere diferentes valores dos parâmetros, por exemplo, $\delta = 0, 2$, $\beta = \pm 1$, $\alpha = 1$, $\omega = 1$ e γ variando entre 0, 2 e 0, 7. Represente os resultados graficamente (confira a Figura 8.9).

3. Adapte o programa escrito anteriormente para obter uma função que avalia se um sistema é estável. Utilize esta função para identificar regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros da equação de Duffing. Resolva numericamente a equação de Duffing com vários conjuntos de parâmetros para validar os resultados anteriores. Explore os diferentes tipos de soluções para este sistema e melhore o programa anterior, se necessário.

Figura 8.9: Regiões de estabilidade e de caos para a equação de Duffing (8.69) com $\delta = 0, 2$, $\beta = -1$, $\alpha = 1$, $\omega = 1$ e $\gamma = 0, 5$.

8.6 Exercícios

Exercício 8.1. Seja $b \in \mathbb{R}$ uma constante. Considere os seguintes campos de vetores:

- (a) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $F(x) = bx^3$.
 (b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (-y + bx(x^2 + y^2), x + by(x^2 + y^2))$.

Mostre que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ é estável mas não é assintoticamente estável para o campo de vetores linear $A = DF(0)$. Mostre que $\gamma(t) \equiv 0$ é instável para o campo de vetores F se $b > 0$ e é assintoticamente estável se $b < 0$. Neste último caso, podemos afirmar que a estabilidade é exponencial?

Exercício 8.2. Mostre que a solução $\gamma(t) \equiv 0$ da equação diferencial

$$x'' + 2x'(x' - 1) + x(1 + x^2) = 0$$

é exponencialmente estável.

Exercício 8.3. Mostre que para quaisquer valores positivos dos parâmetros s , r e b existe $R > 0$ tal que $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x, y, z) = rx^2 + sy^2 + s(z - 2r)^2$ é função de Lyapunov da equação de Lorenz

$$\begin{cases} x' = -sx + sy \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

no complementar da bola $B_R(0)$. Conclua que toda trajetória $f^t(x, y, z)$ da equação de Lorenz está definida para todo $t \in [0, +\infty)$ e todo ponto de acumulação quando $t \rightarrow +\infty$ está contido no fecho de $B_R(0)$.

Exercício 8.4. Verifique que, para o pêndulo com atrito (Exemplos 8.11 e 8.13),

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m(ly)^2 + 2mg(l - l \cos x) + \frac{1}{2}m(ly + clx)^2$$

define uma função de Lyapunov estrita na vizinhança da origem. Conclua que a solução estacionária $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é assintoticamente estável.

Exercício 8.5 (Hahn). Verifique que $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $V(x, y) = x^2/(1+x^2) + y^2$ é uma função de Lyapunov estrita para a equação diferencial autônoma

$$x' = -\frac{6x}{(1+x^2)^2} + 2y \quad \text{e} \quad y' = -\frac{2(x+y)}{(1+x^2)^2}.$$

Mostre que as trajetórias da equação que cruzam a hipérbole

$$\left\{ (x, y) : x > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{x - \sqrt{2}} \right\}$$

o fazem da esquerda para a direita. Deduza que a trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ não é globalmente assintoticamente estável.

Exercício 8.6. Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo vetorial de classe C^1 . Lembre que uma função contínua $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada integral primeira de F se ela é constante ao longo das trajetórias de F .

1. Mostre que se $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 então f é integral primeira de F se e somente se $Df(x) \cdot F(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$.
2. Mostre que se $p \in \mathcal{U}$ é um ponto regular de F então existe uma vizinhança V de p tal que a restrição $F|_V$ admite $d-1$ integrais primeiras f_1, \dots, f_{n-1} de classe C^1 tais que as derivadas $Df_1(q), \dots, Df_{n-1}(q)$ são linearmente independentes em todo ponto $q \in V$.
3. Encontre uma integral primeira do centro dado por:

$$x'_1 = -\beta x_2 \quad \text{e} \quad x'_2 = \beta x_1, \quad \text{onde } \beta > 0,$$

e da sela dada por

$$x'_1 = \lambda_1 x_1 \quad \text{e} \quad x'_2 = \lambda_2 x_2, \quad \text{onde } \lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

Exercício 8.7. Verifique que o conjunto X em (8.19) é invariante e que qualquer conjunto invariante contido em Y também está contido em X .

Exercício 8.8. Verifique as afirmações no Exemplo 8.21. Mostre, além disso, que nesse caso a solução estacionária $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ é instável.

Exercício 8.9. Mostre que a solução estacionária $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ da equação diferencial $(x, y)' = (-x^3 + 2y^3, -2xy^2)$ é assintoticamente estável.

Exercício 8.10. Considere a equação diferencial de ordem dois e dimensão um

$$x'' + b(x') + c(x) = 0$$

onde $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $yb(y) > 0$ para todo $y \neq 0$ e $xc(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ (isto implica $b(0) = c(0) = 0$). Usando a função

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x c(s) ds,$$

mostre que a solução estacionária $x(t) \equiv 0$ é globalmente assintoticamente estável. Exiba escolhas das funções b e c para as quais a análise linear da estabilidade (método da linearização) seja inconclusiva.

Exercício 8.11. Considere a equação diferencial obtida quando invertemos o sentido do tempo em (8.37). Mostre que a trajetória $\gamma(t) \equiv 0$ é globalmente assintoticamente estável mas não é exponencialmente estável.

Exercício 8.12. Demonstre os Teoremas 8.15 e 8.29.

Exercício 8.13. Verifique que a mudança de coordenadas ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$) transforma a equação diferencial (8.5) em

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho^2) \\ \theta' = 1 - \cos \theta. \end{cases}$$

Use este fato para concluir que toda solução de (8.5) converge para $(1, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ mas a solução constante $\gamma \equiv (1, 0)$ é instável.

Exercício 8.14. Use o Critério de Chetaev (Teorema 8.33) para completar a demonstração da Proposição 8.7, tratando também o caso em que o campo de vetores linear A tem valores característicos que não são reais.

Exercício 8.15. Considere a equação diferencial (8.35). A partir das conclusões no Exemplo 8.30, mostre que se a função ω é tal que existem $\theta > 0$ e números arbitrariamente grandes $a, b > 0$ satisfazendo

$$b - a \geq \theta \quad \text{e} \quad \frac{1}{b - a} \left| \int_a^b \omega(t) dt \right| \geq \theta,$$

então a solução $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável. Isto vale, por exemplo, sempre que ω é periódica e não identicamente nula.

Exercício 8.16. Suponha que a função $A(t)$ em (8.40) é constante igual a A_0 , onde A_0 é um campo de vetores linear tal que algum dos seus autovalores tem parte real positiva. Supondo que vale (8.54), mostre que a solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ não é estável para (8.40).

Exercício 8.17. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $P(t)$ uma matriz simétrica de dimensão $d \geq 2$ cujas entradas são funções contínuas do tempo t e cujos autovalores são menores ou iguais que -1 . Mostre que toda solução $x(t)$ da equação diferencial $x' = P(t)x$ satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Exercício 8.18. Considere a equação linear não autônoma $x' = p(t)x$ de ordem 1 e dimensão 1, onde $t \mapsto p(t)$ é função contínua definida num intervalo $(a, +\infty)$. Mostre que a solução $x(t) \equiv 0$ é:

1. estável se e somente se $\int_{t_0}^{\infty} p(s) ds < \infty$ para algum $t_0 > a$;
2. uniformemente estável se e somente se $\sup\{\int_{t_0}^{\infty} p(s) ds : t_0 > a\} < \infty$ para algum $t_0 > a$;
3. estável se $p(t) \leq 0$ para todo $t \geq t_0$ e algum $t_0 > a$;
4. assintoticamente estável se $\int_{t_0}^{\infty} p(s) ds = -\infty$ para algum $t_0 > a$;
5. exponencialmente estável se existem $c > 0$ e $T > 0$ tais que $\int_t^{t+T} p(s) ds \leq -c$ para todo $t \geq t_0$ e algum $t_0 > a$.

Além disso, todas estas condições são independentes da escolha de t_0 .

Use estas caracterizações para dar exemplos de equações lineares para as quais a solução nula é: (i) estável mas não uniformemente estável; (ii) instável; (iii) uniformemente estável mas não assintoticamente estável; (iv) assintoticamente estável mas não exponencialmente estável; (v) exponencialmente estável.

Exercício 8.19 (C). Considere $x'' = x \operatorname{sen} t$, ou seja, a equação de Mathieu (7.19) com parâmetros $a = 0$ e $b = 1$. Use as aplicações computacionais desenvolvidas na Seção 8.5 para calcular os expoentes de Lyapunov de trajetórias de diferentes condições iniciais. Compare os resultados com as conclusões do Exercício 7.17.

Exercício 8.20. Mostre que a função expoente de Lyapunov satisfaz:

1. $\lambda(0) = -\infty$;
2. $\lambda(cx) = \lambda(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e todo número real $c \neq 0$;
3. $\lambda(x + y) \leq \lambda(x) + \lambda(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Deduza que $\{x \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) \leq a\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^d para todo $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 8.21. Mostre que se a função $t \mapsto A(t)$ é periódica então a equação linear $x' = A(t)x$ é regular no sentido de Lyapunov. Em particular, isso vale sempre que $A(t)$ é constante.

Exercício 8.22. Considere o oscilador de Duffing sem amortecimento nem ação exterior, ou seja, $x'' + \beta x + \alpha x^3 = 0$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4$.

1. Mostre que a equação diferencial pode ser escrita como

$$x' = \partial_y H \quad \text{e} \quad y' = -\partial_x H.$$

2. Conclua que a função H é constante ao longo de soluções da equação. Represente as curvas de nível de H graficamente (use as aplicações computacionais desenvolvidas na Seção 4.6).
3. Encontre os pontos estacionários do fluxo e estude a sua estabilidade. Como eles se relacionam com a função H ?
4. Como se comporta H ao longo das soluções da equação $x'' + \delta x' + \beta x + \alpha x^3 = 0$ sem ação exterior mas com amortecimento $\delta > 0$?

[Observação: O item 1 significa que a equação diferencial é *hamiltoniana*, com H como função de energia.]

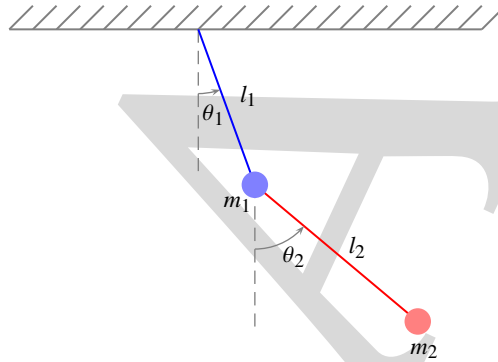


Figura 8.10: Pêndulo harmônico duplo no plano: l_1, l_2 são os comprimentos e m_1, m_2 são as massas das duas hastes; g é a aceleração gravitacional; θ_1, θ_2 são os ângulos das hastes com relação à vertical apontando para baixo.

Exercício 8.23 (C). O movimento do *pêndulo harmônico duplo* no plano (veja a Figura 8.10) pode ser descrito pela equação diferencial de ordem 2 e dimensão 2

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\theta_1'' + m_2l_2\theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2(\theta_2')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + g(m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0 \quad (8.70) \\ m_2l_2\theta_2'' + m_2l_1\theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1(\theta_1')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2g \sin \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

Suponha que as hastes são idênticas ($m_1 = m_2$ e $l_1 = l_2$) e escolha unidades de massa comprimento e tempo de tal forma que $m_1 = m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 1$ e $g = 1$. Verifique

que então (8.70) corresponde a

$$\theta_1'' = \frac{1}{2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \left(-(\theta_1')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\theta_2')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ \left. + \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2 \sin \theta_1 \right)$$

$$\theta_2'' = \frac{1}{2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \left(2(\theta_1')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_2')^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ \left. + 2 \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2 \sin \theta_2 \right)$$

Integre esta equação numericamente para diferentes condições iniciais. Represente os resultados $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ por meio de visualizações animadas. Usando as aplicações funcionais desenvolvidas na Seção 8.5, estime os expoentes de Lyapunov do fluxo ao longo das trajetórias calculadas.

8.7 Notas

A teoria da estabilidade de equações diferenciais teve início com a publicação, em 1892, do livro *O problema geral da estabilidade do movimento* [65], da autoria de Lyapunov, e foi retomada algum tempo depois no trabalho de Perron [91]. Lyapunov introduziu as duas abordagens do problema que discutimos neste capítulo: linearização/expoentes de Lyapunov e funções de Lyapunov (método direto). Perron desenvolveu muitas das ferramentas necessárias para a implementação destas ideias, incluindo o Teorema da Variedade Estável que estudaremos em detalhe no Capítulo 10, e apontou, por meio de exemplos (Exemplo 8.43) que a condição de regularidade de Lyapunov não é sempre satisfeita.

O matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov nasceu na cidade de Yaroslavl em 1857 e ingressou na Universidade de São Petersburgo em 1876. Em 1884 defendeu uma dissertação de mestrado sobre a estabilidade de fluidos em rotação, tema que lhe havia sido proposto pelo professor Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894). Esse mesmo tema esteve na base de sua tese de doutorado [65], defendida na Universidade de Moscou em 1892, e permearia boa parte de sua produção científica. Ademais do desenvolvimento da teoria da estabilidade, Lyapunov também é conhecido por diversas contribuições à Física Matemática e à Teoria da Probabilidade. Em 1902, voltou a São Petersburgo para ocupar a vaga de professor aberta pela morte de Chebyshev. Na sequência de problemas familiares e de saúde, Lyapunov faleceu na cidade de Odessa em 1918.

O matemático alemão Oskar Perron (1880–1975) foi professor na Universidade de Heidelberg, de 1914 a 1922, e na Universidade de Munique, de 1922 a 1951. Ele fez importantes contribuições à Teoria das Equações Diferenciais, em particular, desenvolvendo boa parte das ferramentas matemáticas que conduziram dos trabalhos iniciais de Lyapunov à teoria atual dos Sistemas Dinâmicos. Voltaremos a falar sobre o seu trabalho no Capítulo 10. Perron também é conhecido por seu tratado sobre frações contínuas intitulado *Die Lehrer von den Kettenbrüchen*.

O trabalho de Lyapunov teve pouca repercussão durante várias décadas, apesar de ter sido traduzido do russo para o francês por iniciativa de Henri Poincaré. Mas essa situação mudou radicalmente durante a Guerra Fria (após a segunda Guerra Mundial) quando o método das funções de Lyapunov se revelou um instrumento extremamente eficaz na análise e controle da estabilidade do movimento de espaçonaves e mísseis, o qual é regido por leis fortemente não lineares. A partir daí, a teoria teve um desenvolvimento notável e existe atualmente uma ampla literatura sobre este tema, tanto do ponto de vista teórico quanto voltada diretamente para aplicações.

Crítérios de instabilidade, incluindo o Teorema 8.33, foram obtidos por Chetaev e outros matemáticos. O Teorema do Conjunto Invariante (Teorema 8.18 foi provado por Krasovskii em 1959, na União Soviética, e redescoberto por LaSalle no ano seguinte, no ocidente. A teoria de Lyapunov recíproca foi iniciada por Persidskii em 1933 e desenvolveu-se a partir dos trabalhos de Krasovskii, Massera e outros matemáticos. Os trabalhos do pioneiro matemático uruguaio José Luis Massera nos anos 1940–1950 também ajudaram a colocar em relevo a importância das noções de estabilidade uniforme. Mais recentemente, o conceito de função de Lyapunov vem sendo aplicado em contextos muito distintos em Sistemas Dinâmicos: um belo exemplo é o teorema de classificação dos homeomorfismos expansivos de superfícies devido a Jorge Lewowicz [61], outro matemático uruguaio, e Kochi Hiraide [43], matemático japonês.

José Luis Massera (1915–2002) distinguiu-se por seu trabalho na Teoria de Estabilidade de Lyapunov, especialmente a teoria recíproca que mencionamos ao final da Seção 8.3.3. O chamado *Lema de Massera* (Lema 2 em [68]) é usado para construir funções de Lyapunov:

Lema 8.45. *Se a função $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é contínua e estritamente decrescente com $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ e $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é contínua e não decrescente, então existe uma função $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ de classe C^1 tal que tanto G como sua derivada G' são estritamente crescentes e se anulam na origem e existem constantes positivas c_1, c_2 tais que*

$$\int_0^\infty G(u(t)) dt \leq c_1 \text{ e } \int_0^\infty G'(u(t))h(t) dt \leq c_2$$

para qualquer função contínua $u : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $u(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq 0$.

Em paralelo com seu trabalho matemático, Massera teve um papel de grande destaque na resistência à ditadura em seu país, tendo sido encarcerado entre 1975 e 1984.

Nikolay Nikolayevich Krasovskii (1924–2012) foi um destacado matemático russo, da região dos Urais, que deu importantes contribuições à teoria do Controle, aos Sistemas Dinâmicos e à Teoria dos Jogos Diferenciáveis. Anunciou um caso particular do Teorema do Conjunto Invariante em 1952 e provou a sua formulação geral no livro [53], publicado em 1959. O mesmo resultado foi obtido no ano seguinte [59], de modo independente, pelo matemático americano Joseph Pierre LaSalle (1916–1983). LaSalle, um destacado especialista em Sistemas Dinâmicos e Teoria da Estabilidade, foi presidente da SIAM – Society for Industrial and Applied Mathematics em 1962–1963.

A nossa seleção de tópicos neste capítulo é orientada pelo espírito da teoria qualitativa das equações diferenciais. Ela foi inspirada, sobretudo, nos textos de LaSalle–Lefschetz [58], Hahn [38, Capítulos IV e V], Vidyasagar [137, Capítulo 5], Slotine–Li [116, Capítulos 3 e 4] e Barreira–Pesin [7] no caso da Seção 8.4.3. Este último

contém uma demonstração do Teorema 8.44. Muitos dos exemplos e alguns dos exercícios incluídos aqui são adaptados de uma ou mais dessas referências, as quais também contêm muitos outros exemplos de aplicações desta teoria em problemas concretos, incluindo diversos métodos práticos para a construção de funções de Lyapunov.

Ao final da década de 1960, o matemático russo Valery Iustinovitch Oseledets [81] provou que a condição de regularidade de Lyapunov é satisfeita *para quase toda a trajetória*: as trajetórias que não satisfazem a condição de regularidade formam um conjunto com medida zero, relativamente a qualquer medida de probabilidade invariante pelo sistema. Este resultado notável projetou o conceito de expoente de Lyapunov para o centro da teoria atual dos Sistemas Dinâmicos. A este respeito, recomendamos ao leitor os livros de Barreira, Pesin [7], Bonatti, Díaz, Viana [13, Capítulo 12] e Viana [136].

A equação de Duffing foi proposta em 1918 pelo engenheiro alemão Georg Duffing (1861–1944). Para maiores informações sobre a sua relevância como modelo de sistemas físicos, consulte Moon, Holmes [73, 74], Guckenheimer, Holmes [34], Ott [82] e Thompson, Stewart [130].