

Capítulo 7

Equações lineares não autônomas

Conforme observamos anteriormente, toda equação diferencial não autônoma pode ser escrita como uma equação autônoma. Então, em teoria, poderíamos nos restringir ao estudo do caso autônomo. No entanto, na prática existem diversas situações em que vale a pena analisar as equações não autônomas diretamente, sem fazer tal redução. Um exemplo disso são as equações da forma

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (7.1)$$

onde $A : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ são aplicações contínuas. Estas *equações diferenciais lineares não autônomas* serão o tema principal deste capítulo. Quando o termo $b(t)$ é identicamente nulo, ou seja, quando a equação tem a forma

$$x' = A(t)x, \quad (7.2)$$

diremos que se trata de uma *equação diferencial linear homogênea*.

De fato, equações deste tipo já aparecem de maneira natural no estudo das próprias equações diferenciais autônomas. Para explicar isso, consideremos a equação diferencial

$$x' = F(x), \quad (7.3)$$

associada a um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 . Conforme vimos na Proposição 5.1, o fluxo de (7.3) é de classe C^1 e, para cada x , a derivada $t \mapsto Df^t(x)$ é solução da equação

$$X' = DF(f^t(x))X, \quad X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d). \quad (7.4)$$

Note que (7.4) é uma equação da forma (7.2) com $A(t) = DF(f^t(x))$. Ela é chamada *linearização* da equação (7.3). Na Seção 7.3 daremos uma aplicação importante desta observação: a fórmula de Liouville–Ostrogradskii para o jacobiano das aplicações f^t do fluxo (Teorema 7.5).

Observe que a expressão $F(t, x) = A(t)x + b(t)$ no lado direito de (7.1) é localmente lipschitziana na variável x :

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\| \quad (7.5)$$

para quaisquer $t \in I$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, e a norma $\|A(t)\|$ é localmente limitada, uma vez que a função $t \mapsto A(t)$ é contínua. Em particular, todas estas equações têm a propriedade de unicidade de soluções.

O nosso primeiro objetivo será descrever o espaço de soluções máximas da equação homogênea (7.2): veremos na Seção 7.1 que se trata de um espaço vetorial de dimensão d . Isso também nos levará, na Seção 7.2, a introduzir o conceito de *solução fundamental* da equação (7.2) e a estudar as suas propriedades mais importantes.

Posteriormente, na Seção 7.4 estudaremos o espaço das soluções da equação geral (7.1). Mostraremos que se trata de um espaço afim, cuja direção está dada pelo espaço vetorial das soluções da equação homogênea associada. Mais ainda, é possível determinar esse espaço afim completamente a partir das soluções da equação homogênea, utilizando o *método da variação do parâmetro*.

Na última seção trataremos o caso particular da equação homogênea (7.2) com *coeficientes periódicos*, ou seja, tal que a função $t \mapsto A(t)$ é periódica. O Teorema de Floquet (Teorema 7.14) mostra que, mediante uma mudança conveniente de coordenadas, é possível reduzir tais equações ao caso linear autônomo, que foi estudado no Capítulo 6.

7.1 Espaço de soluções da equação homogênea

Começemos por provar o seguinte fato:

Lema 7.1. *As soluções máximas da equação diferencial (7.1) estão definidas em todo I .*

Demonstração. Semelhante à demonstração do Teorema 3.8. Considere qualquer $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ e seja $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ a solução máxima com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$. Pela demonstração do Teorema 2.4,

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\gamma(s) + b(s)) ds \text{ para todo } t \in (\alpha, \beta).$$

Suponha que $\beta < \sup I$; em particular, β é finito. Então, como as funções $t \mapsto A(t)$ e $t \mapsto b(t)$ são contínuas em I , existem $C > 0$ e $c > 0$ tais que $\|A(t)\| \leq C$ e $\|b(t)\| \leq c$ para todo $t \in [t_0, \beta]$. Logo,

$$\|\gamma(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t (C\|\gamma(s)\| + c) ds \leq \|x_0\| + c(t - t_0) + \int_{t_0}^t C\|\gamma(s)\| ds$$

para todo $t \in [t_0, \beta]$. Pelo Lema de Gronwall (Proposição 3.9) isto implica que

$$\|\gamma(t)\| \leq (\|x_0\| + c(t - t_0))e^{C(t-t_0)} \text{ para todo } t \in [t_0, \beta].$$

Tomemos $R = (\|x_0\| + c(\beta - t_0))e^{C(\beta - t_0)}$. Então

$$(t, \gamma(t)) \in [t_0, \beta] \times \overline{B_R(0)} \text{ para todo } t \in [t_0, \beta].$$

Como $[t_0, \beta] \times \overline{B_R(0)}$ é compacto, isto está em contradição com o Teorema 3.5. Esta contradição mostra que $\beta = \sup I$. Analogamente se prova que $\alpha = \inf I$. \square

Isto nos permite caracterizar o espaço das soluções da equação homogênea da seguinte forma:

Teorema 7.2. *O conjunto \mathcal{S}_0 das soluções máximas da equação (7.2) é um espaço vetorial de dimensão d . Além disso, dado qualquer subconjunto finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ de \mathcal{S}_0 , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ é linearmente independente;
2. $\{\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_k(t_0)\}$ é subconjunto linearmente independente de \mathbb{R}^d , para algum $t_0 \in I$;
3. $\{\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_k(t_0)\}$ é subconjunto linearmente independente de \mathbb{R}^d , para todo $t_0 \in I$.

Demonstração. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ duas soluções máximas de (7.2) e sejam a_1, a_2 dois números reais. Então

$$\begin{aligned} (a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2)'(t) &= a_1\gamma_1'(t) + a_2\gamma_2'(t) \\ &= a_1A(t)\gamma_1(t) + a_2A(t)\gamma_2(t) = A(t)(a_1\gamma_1(t) + a_2\gamma_2(t)) \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Portanto, $a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2$ é solução (máxima) de (7.2). Isto prova que \mathcal{S}_0 é um espaço vetorial.

Em seguida, fixe qualquer $t_0 \in I$ e considere a aplicação

$$\Gamma : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \gamma \mapsto \gamma(t_0).$$

É claro que a aplicação Γ é linear. Pelo Teorema 3.2, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^d$ existe uma única solução máxima tal que $\gamma(t_0) = x_0$. Em outras palavras, Γ é sobrejetiva e injetiva. Portanto Γ é um isomorfismo, o que implica que $\dim \mathcal{S}_0 = \dim \mathbb{R}^d = d$.

Agora considere qualquer conjunto finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \mathcal{S}_0$ e números reais a_1, \dots, a_k . Como Γ é um isomorfismo,

$$a_1\gamma_1 + \dots + a_k\gamma_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1\gamma_1(t_0) + \dots + a_k\gamma_k(t_0) = \Gamma(a_1\gamma_1 + \dots + a_k\gamma_k) = 0.$$

Segue que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ é linearmente independente se e somente se $\{\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_k(t_0)\}$ é linearmente independente. Ou seja, (1) é equivalente a (2). Como t_0 é arbitrário, isto também prova que (1) é equivalente a (3). \square

7.2 Soluções fundamentais da equação homogênea

Chamamos *solução fundamental* da equação diferencial (7.2) qualquer aplicação

$$\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \quad \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}(t) & \cdots & \gamma_{1,d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{d,1}(t) & \cdots & \gamma_{d,d}(t) \end{pmatrix}$$

cujos vetores coluna $\gamma_j = (\gamma_{1,j}, \dots, \gamma_{d,j})$, $j = 1, \dots, d$, formam uma base de \mathcal{S}_0 . A razão de ser desta denominação está na seguinte consequência imediata da definição:

Lema 7.3. *Se $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é uma solução fundamental de (7.2) então as soluções máximas da equação (7.2) são, precisamente, as funções $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ da forma*

$$\gamma(t) = \Gamma(t)x_0 \text{ para algum } x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ fixado.}$$

Demonstração. Como os vetores coluna $\gamma_j : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, d$ formam uma base de \mathcal{S}_0 , as soluções máximas da equação são as combinações lineares

$$\gamma(t) = a_1\gamma_1(t) + \cdots + a_d\gamma_d(t).$$

Esta igualdade pode ser reescrita como $\gamma(t) = \Gamma(t)x_0$, onde $x_0 = (a_1, \dots, a_d)$. \square

Vamos coletar na próxima proposição as principais propriedades das soluções fundamentais:

Proposição 7.4. *1. Se $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é solução fundamental de (7.2) então $\Gamma(t)$ é um isomorfismo para todo $t \in I$.*

2. As soluções fundamentais de (7.2) são as soluções da equação diferencial

$$Y' = A(t)Y, Y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \tag{7.6}$$

com valores no subconjunto dos isomorfismos de \mathbb{R}^d .

3. Dada qualquer solução fundamental $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ de (7.2), as soluções de (7.6) são as funções da forma

$$I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \quad t \mapsto \Gamma(t)P,$$

para algum $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Além disso, uma tal função $t \mapsto \Gamma(t)P$ é solução fundamental de (7.2) se e somente se P é um isomorfismo.

Demonstração. Como sabemos, uma matriz quadrada é invertível se e somente se os seus vetores coluna são linearmente independentes. Portanto a afirmação (1) segue imediatamente da implicação (1) \Rightarrow (3) no Teorema 7.2.

Para provar a afirmação (2), considere qualquer função diferenciável $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e sejam $\gamma_j = (\gamma_{1,j}, \dots, \gamma_{d,j})$, $j = 1, \dots, d$, os seus vetores coluna. Represente por $A_{i,j}(t)$ as entradas da matriz de $A(t)$. Então

$$\begin{aligned} \Gamma'(t) = A(t)\Gamma(t) &\Leftrightarrow \gamma'_{i,j}(t) = \sum_{l=1}^d A_{i,l}(t)\gamma_{l,j}(t) \text{ para quaisquer } i, j = 1, \dots, d \\ &\Leftrightarrow \gamma'_j(t) = \sum_{l=1}^d A_{i,l}(t)\gamma_{l,j}(t) \text{ para qualquer } j = 1, \dots, d \\ &\Leftrightarrow \gamma'_j(t) = A(t)\gamma_j(t) \text{ para qualquer } j = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Em outras palavras, Γ é solução de (7.6) se e somente se todos os vetores coluna são soluções de (7.2). Além disso, supondo que $\Gamma(t)$ é um isomorfismo para todo t , segue da implicação (3) \Rightarrow (1) no Teorema 7.2 que os vetores coluna formam uma base do espaço \mathcal{S}_0 das soluções máximas.

Se Γ é uma solução fundamental e $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ então

$$(\Gamma(t)P)' = \Gamma'(t)P = A(t)\Gamma(t)P$$

para todo $t \in I$. Portanto, $t \mapsto \Gamma(t)P$ é solução de (7.6). Reciprocamente, se $\Delta : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é uma solução de (7.6) então (veja o Exercício 7.5)

$$\begin{aligned} (\Gamma(t)^{-1}\Delta(t))' &= \Gamma(t)^{-1}\Delta'(t) - \Gamma(t)^{-1}\Gamma'(t)\Gamma(t)^{-1}\Delta(t) \\ &= \Gamma(t)^{-1}A(t)\Delta(t) - \Gamma(t)^{-1}A(t)\Gamma(t)\Gamma(t)^{-1}\Delta(t) = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Isto significa que existe $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tal que $\Gamma(t)^{-1}\Delta(t) = P$ para todo $t \in I$. Finalmente, é claro que $\Gamma(t)P$ é isomorfismo para todo $t \in I$ se e somente se P é um isomorfismo. \square

7.3 Fórmula de Liouville–Ostrogradskii

Nesta seção vamos estudar o comportamento do determinante das soluções fundamentais de (7.2). O principal resultado é o seguinte teorema:

Teorema 7.5 (Fórmula de Liouville–Ostrogradskii). *Seja $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ uma solução qualquer de (7.6) e seja $t_0 \in I$ qualquer. Então,*

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right) \text{ para todo } t \in I. \quad (7.8)$$

Demonstração. Escreva

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}(t) & \cdots & \gamma_{1,d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{d,1}(t) & \cdots & \gamma_{d,d}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1}(t) & \cdots & a_{d,d}(t) \end{pmatrix}.$$

A hipótese de que Γ é solução de (7.6) traduz-se por

$$\gamma'_{i,j}(t) = \sum_{l=1}^d a_{i,l}(t)\gamma_{l,j} \text{ para quaisquer } i, j = 1, \dots, d \text{ e todo } t \in I.$$

Então, para cada $i = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned} (\gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,d})'(t) &= \sum_{l=1}^d a_{i,l}(t)(\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,d})(t) \\ &= +a_{i,i}(t)(\gamma_{i,1}, \dots, \gamma_{i,d})(t) + \sum_{l \neq i} a_{i,l}(t)(\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,d})(t). \end{aligned}$$

Usando a derivada de uma aplicação multilinear e a relação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} (\det \Gamma)'(t) &= \sum_{i=1}^d \det \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_{i,1} & \cdots & \gamma'_{i,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{d,1} & \cdots & \gamma_{d,d} \end{pmatrix} (t) = \sum_{i=1}^d \det \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,i}\gamma_{i,1} & \cdots & a_{i,i}\gamma_{i,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{d,1} & \cdots & \gamma_{d,d} \end{pmatrix} (t) \\ &= \sum_{i=1}^d a_{i,i}(t) \det \Gamma(t) = \operatorname{tr} A(t) \det \Gamma(t). \end{aligned}$$

Isto significa que a função $t \mapsto \det \Gamma(t)$ é solução da equação linear de ordem 1 e dimensão 1:

$$x' = a(t)x, \quad a(t) = \operatorname{tr} A(t).$$

Logo (lembre do Exercício 3.5),

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \text{ para todo } t \in I,$$

que é precisamente o que queríamos provar. \square

Como vimos anteriormente, as soluções fundamentais da equação (7.2) correspondem, precisamente, ao caso particular em que $\det \Gamma(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

7.3.1 Aplicação a equações autônomas não lineares

Agora consideremos a equação autônoma (7.3) associada a um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 . Conforme observamos anteriormente, a derivada $t \mapsto Df^t(x)$ do fluxo de F é solução da linearização (7.4). Então, pela fórmula de Liouville–Ostrogradskii,

$$\det Df^t(x) = \det Df^0(x) \exp \left(\int_0^t \operatorname{tr} DF(f^s(x)) ds \right),$$

para todo t e todo x . Note que $\det Df^0 \equiv 1$, uma vez que $f^0 = \text{id}$.

O *divergente* de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 é a função

$$\text{div } F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } \text{div } F(x) = \text{tr } DF(x).$$

Dizemos que F é um *campo de vetores conservativo* se o divergente for identicamente nulo. Então, a observação anterior prova a seguinte proposição:

Proposição 7.6. *Se $(f^t)_t$ é o fluxo definido por um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 então*

$$\det(Df^t(x)) = \exp\left(\int_0^t \text{div } F(f^s(x)) \, ds\right) \text{ para todo } t \text{ e todo } x.$$

Em particular, se F é conservativo então $\det Df^t(x) = 1$ para todo t e todo x .

Observação 7.7. Fixe t e considere qualquer subconjunto mensurável X do domínio de f^t . Como f^t é um difeomorfismo de classe C^1 , a Fórmula de Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas dá que

$$\text{vol } f^t(X) = \int_X |\det Df^t(x)| \, dx.$$

Se F é conservativo então a Proposição 7.6 dá que $\det Df^t \equiv 1$ e, portanto, $\text{vol } f^t(X) = \text{vol } X$. Isto quer dizer que as transformações de fluxo de um campo de vetores conservativo, ainda que possam modificar a *forma* dos subconjuntos do domínio (veja a Figura 5.7), preservam exatamente o seu *volume*. Isto tem implicações importantes, como já vimos no Capítulo 5.

Exemplo 7.8. A equação do pêndulo harmônico (1.5) é

$$x'' = -\frac{g}{l} \text{sen } x. \quad (7.9)$$

Ela pode ser reescrita como uma equação de ordem 1:

$$(x, y)' = F(x, y) = \left(y, -\frac{g}{l} \text{sen } x\right).$$

Então

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $\text{div } F(x, y) = \text{tr}(DF(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, o fluxo do pêndulo harmônico é conservativo.

7.3.2 Aplicação a equações lineares de ordem superior - wronskiano

Considere a equação diferencial linear homogênea de dimensão 1 e qualquer ordem $k \geq 1$:

$$x^{(k)} = a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \dots + a_1(t)x^{(1)} + a_0(t)x \quad (7.10)$$

onde $a_j : I \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ são funções contínuas. Usando o truque apresentado na Seção 2.5.1, podemos reescrevê-la como uma equação diferencial de ordem 1 e dimensão k :

$$(x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})' = (x_1, \dots, x_{k-1}, a_0(t)x_0 + a_1(t)x_1 + \dots + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}). \quad (7.11)$$

ou, em formato vetorial, $X' = A(t)X$ com $X \in \mathbb{R}^k$ e

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{k-2}(t) & a_{k-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Trata-se, portanto, de uma equação da forma (7.2). Observe que $\text{tr } A(t) = a_{k-1}(t)$ para todo $t \in I$.

Sejam $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ soluções da equação (7.10). Então

$$\gamma_j : I \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \gamma_j(t) = (\xi_j, \xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(k-1)})(t)$$

é solução de (7.11) para todo $j = 0, 1, \dots, k-1$. Chamamos *matriz wronskiana* das soluções $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ a matriz cujos vetores coluna são estes γ_j , ou seja a função

$$\mathcal{W}(t) = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{k-1} \\ \xi_0^{(1)} & \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_{k-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0^{(k-1)} & \xi_1^{(k-1)} & \cdots & \xi_{k-1}^{(k-1)} \end{pmatrix}(t). \quad (7.13)$$

Então, conforme vimos em (7.7), a função $t \mapsto \mathcal{W}(t)$ é solução de $X' = A(t)X$. Em particular, pela Fórmula de Liouville–Ostrogradskii

$$\det \mathcal{W}(t) = \det \mathcal{W}(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds} = \det \mathcal{W}(t_0) e^{\int_{t_0}^t a_{k-1}(s) ds}. \quad (7.14)$$

O determinante $W(t) = \det \mathcal{W}(t)$ é chamado *wronskiano* das soluções $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$. Desta forma, provamos o seguinte fato útil:

Proposição 7.9. *Soluções $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ da equação (7.10) constituem uma base do espaço de todas as soluções se e somente se o seu wronskiano $W(t)$ é não nulo para algum $t \in I$. Nesse caso, $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

7.4 Espaço de soluções da equação não homogênea

Represente por \mathcal{S} o conjunto das soluções máximas da equação diferencial linear geral (7.1) e por \mathcal{S}_0 o conjunto das soluções máximas da equação diferencial linear homogênea (7.2) associada, ou seja, com o mesmo coeficiente $A(t)$. O lema a seguir significa que \mathcal{S} é um subespaço afim modelado no espaço vetorial \mathcal{S}_0 :

Lema 7.10. *Se u_1 e u_2 são soluções máximas de (7.1), então $u_1 - u_2$ é solução máxima de (7.2). Além disso, se u é solução máxima de (7.1) e v é solução máxima de (7.2) então $u + v$ é solução máxima de (7.1).*

Demonstração. Vejamos a primeira afirmação, a segunda é análoga. Como u_1 e u_2 são soluções de (7.1), por linearidade e um cálculo direto mostra

$$\begin{aligned}(u_1(t) - u_2(t))' &= (A(t)u_1(t) + b(t)) - (A(t)u_2(t) + b(t)) \\ &= A(t)(u_1(t) - u_2(t)),\end{aligned}$$

de onde obtemos o resultado. \square

Logo, para conhecer todas as soluções da equação geral (7.1), basta conhecer alguma solução máxima de (7.1) e todas as soluções máximas da equação homogênea associada (7.2). Isto segue imediatamente do Lema 7.10 mas no restante desta seção provaremos um fato bem mais interessante: *se conhecermos todas as soluções máximas da equação homogênea associada, podemos encontrar alguma solução máxima da equação geral (7.1)*; logo, pela observação anterior, podemos encontrar todas as soluções de (7.1).

O argumento está baseado no chamado *método da variação do parâmetro*, que passamos a apresentar. Seja $\Gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ uma solução fundamental de (7.2). Vamos procurar soluções da equação (7.1) da forma

$$x(t) = \Gamma(t)c(t) \quad (7.15)$$

para alguma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ a ser determinada. Substituindo na equação, vemos que c deve satisfazer

$$\Gamma'(t)c(t) + \Gamma(t)c'(t) = x'(t) = A(t)x(t) + b(t) = A(t)\Gamma(t)c(t) + b(t).$$

Como $\Gamma'(t) = A(t)\Gamma(t)$, esta igualdade é equivalente a $\Gamma(t)c'(t) = b(t)$, ou seja,

$$c'(t) = \Gamma(t)^{-1}(b(t)).$$

Portanto, a função $c(t)$ deve ser dada por $c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1}(b(s)) ds$ para algum $c_0 \in \mathbb{R}^d$. Portanto,

$$x(t) = \Gamma(t) \left(c_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1}(b(s)) ds \right).$$

Vamos ilustrar este método em um exemplo concreto:

Exemplo 7.11. Considere a equação diferencial $x'' + x = f(t)$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Ela pode ser reescrita como uma equação de ordem 1, a saber,

$$(x, y)' = A(x, y) + (0, f(t)) \quad \text{com} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

A equação homogênea associada $(x, y)' = A(x, y)$ é autônoma e, portanto, o seu fluxo é dado por

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{pmatrix}.$$

A função $\Gamma(t) = e^{tA}$ é uma solução fundamental da equação homogênea. Busquemos soluções da equação (7.16) da forma

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= \Gamma(t)(c_1(t), c_2(t)) \\ &= (c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t).\end{aligned}\tag{7.17}$$

Note que

$$\begin{aligned}x'(t) &= -c_1(t) \sin t + c_1'(t) \cos t + c_2(t) \cos t + c_2'(t) \sin t \\ &= y(t) + c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t \\ y'(t) &= -c_1(t) \cos t - c_1'(t) \sin t - c_2(t) \sin t + c_2'(t) \cos t \\ &= -x(t) - c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t.\end{aligned}$$

Portanto $(x(t), y(t))$ é solução de (7.16) se e somente se

$$c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0 \quad \text{e} \quad -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = f(t).$$

Pela Regra de Cramer, isto dá que $c_1'(t) = -f(t) \sin t$ e $c_2'(t) = f(t) \cos t$, ou seja,

$$c_1(t) = c_1(0) - \int_0^t f(s) \sin s \, ds \quad \text{e} \quad c_2(t) = c_2(0) + \int_0^t f(s) \cos s \, ds.$$

Substituindo estas expressões em (7.17) obtemos a expressão geral das soluções de (7.16).

7.5 Teorema de Floquet

Nesta seção vamos focar o caso importante de equações lineares homogêneas *com coeficientes periódicos*, ou seja, equações diferenciais da forma

$$x' = A(t)x,\tag{7.18}$$

onde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é periódica de período T para algum $T > 0$:

$$A(t + T) = A(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O seguinte exemplo tem um papel importante em Física Matemática.

Exemplo 7.12 (Equação de Mathieu). Trata-se da equação de dimensão 1 e ordem 2 dada por

$$x'' = (a + b \sin t)x,\tag{7.19}$$

onde a e b são números reais. Ela pode ser reescrita como uma equação de ordem 1 e dimensão 2:

$$(x, y)' = (y, (a + b \sin t)x).$$

ou seja $(x, y)' = A(t)(x, y)$ com

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a + b \sin t & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $A(t)$ é periódica de período 2π e que $\text{tr } A(t) = 0$ para todo t . A última observação implica que o fluxo da equação de Mathieu preserva área no seu domínio.

Suponhamos então que A é periódica de período T e seja $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ uma solução fundamental de (7.18). Defina $\Delta(t) = \Gamma(t+T)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Então,

$$\Delta'(t) = \Gamma'(t+T) = A(t+T)\Gamma(t+T) = A(t)\Gamma(t+T) = A(t)\Delta(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, Δ também é uma solução fundamental de (7.18). Então, pela parte (3) da Proposição 7.4, existe um isomorfismo $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$\Gamma(t+T) = \Delta(t) = \Gamma(t)P \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 7.13. *Existe uma aplicação linear complexa $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ tal que $e^{TB} = P$.*

A demonstração desta proposição será dada na próxima seção. Usando a Proposição 7.13, podemos escrever

$$\Gamma(t+T) = \Gamma(t)e^{TB} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Defina $C(t) = \Gamma(t)e^{-tB}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Então,

$$C(t+T) = \Gamma(t+T)e^{-(t+T)B} = \Gamma(t)e^{TB}e^{-(t+T)B} = \Gamma(t)e^{-tB} = C(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

ou seja, a função $C(t)$ é periódica de período T . Desta forma, fica provado o seguinte teorema:

Teorema 7.14 (Floquet). *Se $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ é periódica de período T , para toda solução fundamental $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ de (7.18) existe $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ e existe $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ periódica de período T tal que*

$$\Gamma(t) = C(t)e^{tB} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (7.20)$$

A expressão (7.20) é chamada *forma normal da solução fundamental*. Lembrando que os vetores coluna de Γ formam uma base do espaço das soluções de (7.18), o Teorema de Floquet significa que existe uma mudança de coordenadas linear dependendo periodicamente do tempo

$$x \mapsto y = C(t)^{-1}x$$

que transforma a equação (7.18) em uma equação autônoma, a saber, $y' = By$.

7.5.1 Logaritmos de aplicações lineares

Dizemos que $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ é um *logaritmo* de uma aplicação $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ se $e^B = A$. Nesta seção vamos provar o seguinte teorema, que contém a Proposição 7.13:

Teorema 7.15. *Um aplicação $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ admite um logaritmo se e somente se A é um isomorfismo.*

Se $A = e^B$ então é claro que A é um isomorfismo: a sua inversa é e^{-B} . Agora suponha que A é um isomorfismo. Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan (Teorema 6.8), e a parte (1) da Proposição 6.3, não é restrição supor que A tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} N_1 + D_1 & & \\ & \dots & \\ & & N_r + D_r \end{pmatrix}$$

onde ou D_j tem a forma (6.11) e N_j tem a forma (6.7) ou D_j tem a forma (6.18) e N_j tem a forma (6.21). Para encontrar um logaritmo para A basta encontrar um logaritmo B_j para cada um dos blocos $N_j + D_j$.

(a) Caso real com $N_j = 0$: Então $N_j + D_j = \lambda_j \text{Id}$. Note que $\lambda_j \neq 0$ pois estamos supondo que A é um isomorfismo. Então observe que $B_j = \log \lambda_j \text{Id}$ é um logaritmo de $N_j + D_j$. Também é claro que B_j não é único logaritmo de $N_j + D_j$, porque a função exponencial no plano complexo é periódica de período $2\pi i$ e isso implica que a função logaritmo em \mathbb{C} é multivaluada.

(b) Caso real com $D_j = \text{Id}$: Então $N_j + D_j = \text{Id} + N_j$. Lembre que para todo $x \in (-1, 1)$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Isto sugere um candidato natural para logaritmo de $I + N_j$, a saber,

$$B_j = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{N_j^l}{l}. \quad (7.21)$$

Observe que se trata de uma soma finita, uma vez que N_j é nilpotente, e portanto o problema da convergência não se aplica. Deixamos ao cuidado do leitor (Exercício 7.12) verificar que B_j dada por (7.21) é realmente um logaritmo para $N_j + D_j$.

(c) Caso real geral: Como $D_j = \lambda_j \text{Id}$, podemos escrever

$$N_j + D_j = \lambda_j \text{Id} (I + N_j/\lambda_j).$$

Claro que N_j/λ_j é idempotente. Logo, o parágrafo (b) fornece um logaritmo B'_j para $\text{Id} + N_j/\lambda_j$. Tome

$$B_j = \log \lambda_j \text{Id} + B'_j.$$

Claro que $\log \lambda_j \text{Id}$ comuta com B'_j . Fica fácil concluir que B_j é um logaritmo de $N_j + D_j$:

$$e^{B_j} = e^{\log \lambda_j \text{Id}} e^{B'_j} = \lambda_j \text{Id} (\text{Id} + N_j/\lambda_j) = N_j + D_j.$$

(d) Caso complexo com $N_j = 0$: Então $N_j + D_j = D_j$ tem a forma (6.18). Seja $\tau_j + i\theta_j$ um logaritmo qualquer de $\alpha_j + i\beta_j$. Como $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$, isto quer dizer que

$$\alpha_j = e^{\tau_j} \cos \theta_j \quad \text{e} \quad \beta_j = e^{\tau_j} \operatorname{sen} \theta_j.$$

Então tome

$$B_j = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tau_j & \theta_j \\ -\theta_j & \tau_j \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \tau_j & \theta_j \\ -\theta_j & \tau_j \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Pela expressão (6.20), temos que $e^{B_j} = D_j$.

(e) Caso complexo geral: Escreva $N_j + D_j = D_j(I + N'_j)$ onde

$$N'_j = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \gamma_j & \delta_j \\ -\delta_j & \gamma_j \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{bmatrix} \gamma_j & \delta_j \\ -\delta_j & \gamma_j \end{bmatrix} \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

com

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \quad \text{e} \quad \delta_j = \frac{-\beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}.$$

Observe que N'_j é nilpotente. Logo, o parágrafo (b) fornece um logaritmo

$$B'_j = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{(N'_j)^l}{l}$$

para $I + N'_j$. Tal como no caso (d), a aplicação

$$B''_j = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tau_j & \theta_j \\ -\theta_j & \tau_j \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \tau_j & \theta_j \\ -\theta_j & \tau_j \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

é um logaritmo para D_j . Tome $B_j = B'_j + B''_j$. Verifique que N'_j comuta com B''_j e, conseqüentemente, B'_j comuta com B''_j . Logo,

$$e^{B_j} = e^{B''_j} e^{B'_j} = D_j(I + N'_j) = N_j + D_j.$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 7.15.

No Exercício 7.13 discutimos em que condições uma aplicação linear admite logaritmo *real*, ou seja existe $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tal que $e^B = A$.

Observação 7.16. Dizemos que um isomorfismo linear $B : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ *mergulha num fluxo* se existe algum campo de vetores linear $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $B = e^A$. Em outras palavras, isto acontece se e somente se B admite algum logaritmo.

7.6 Experimento: ressonância

Originalmente, a palavra ressonância referia-se à observação de que instrumentos musicais podem começar a vibrar por efeito de outros instrumentos, sem intervenção direta do músico. Ela adquiriu um significado muito mais amplo em Ciência e Engenharia, para descrever situações em que um sistema físico é conduzido a oscilações de grande amplitude por efeito de uma força exterior atuando com uma frequência específica, chamada *frequência de ressonância*.

O mecanismo básico pode ser ilustrado considerando um balanço infantil empurrado por um adulto. Se o adulto empurrar em ritmo descaenciado com o balanço, de tal forma que os empurrões tenham lugar tanto quando o balanço está indo como quando ele está vindo, os respectivos efeitos irão anular-se mutuamente. Para serem eficazes, os empurrões precisam ser sincronizados com o balanço, eles devem ter a mesma frequência que o movimento do brinquedo. Mas aí há o risco de que a energia transmitida pelos empurrões, sempre na mesma fase do movimento, possa acumular-se em excesso, fazendo com que o balanço oscile demasiado e causando um acidente. Isso é evitado porque o adulto dosa a intensidade do empurrão, dando tempo para que o atrito e outras resistências ao movimento dissipem o excesso de energia.

Ressonância pode ocorrer com qualquer tipo de vibração ou oscilação e, por isso, é amplamente observada na natureza, tanto macroscopicamente quanto no nível atômico ou molecular. A cena clássica em que a cantora de ópera quebra um copo de vidro com o seu canto¹ fornece uma ilustração muito popular do fenômeno. Outras situações familiares dizem respeito a incidentes com estruturas tais como prédios, pontes, aviões ou trens. Se não forem adequadamente planejadas, tais estruturas podem começar a vibrar sem controle sob o efeito de uma ação exterior periódica (o vento, a vibração de um motor, ou até simples passadas cadenciadas) eventualmente colapsando em consequência.

Ressonância também explica a existência de lacunas no cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter: objetos localizados nessas regiões, que teriam períodos orbitais relacionados com o período da órbita de Júpiter, acumulam energia por meio de sua ressonância com o planeta gigante e são rapidamente ejetados. Um efeito semelhante

¹Note que o efeito tem que ver com a frequência (agudo/grave) e não com a intensidade (volume) da voz.

está na origem das lacunas entre os anéis de Saturno. Efeitos de ressonância são observados, também, entre as marés em algumas costas oceânicas.

De um modo geral, a ressonância é motivo de preocupação para arquitetos e engenheiros, pelos acidentes que pode ocasionar. Mas ela também tem importantes aplicações práticas, por exemplo, nos modernos relógios de quartzo, na geração dos feixes de luz coerente chamados *lasers* e na tecnologia de diagnóstico médico denominada ressonância magnética nuclear.

O modelo matemático mais simples do fenômeno de ressonância é a *equação do oscilador harmônico forçado periodicamente*

$$x'' + b^2x = f(\omega t) \quad (7.22)$$

onde b e ω são parâmetros reais e $f(s)$ é uma função periódica, digamos, com período 2π . Lembre que a equação homogênea $x'' + b^2x = 0$ modela o oscilador harmônico (Exemplo 1.2), e que as suas soluções são as curvas da forma

$$\gamma(t) = \alpha \operatorname{sen}(bt) + \beta \operatorname{cos}(bt).$$

Em particular, todas as soluções são periódicas, com período $2\pi/b$. O termo $f(\omega t)$ no lado direito de (7.22) representa uma dada *ação externa* (em inglês: *forcing*) com período $2\pi/\omega$.

Habitualmente, os efeitos nocivos da ressonância são combatidos munindo o sistema com algum mecanismo de *amortecimento* (em inglês: *damping*), ou seja, que dissipe a energia acumulada. Por exemplo, no caso do balanço que discutimos anteriormente, o amortecimento resulta principalmente do atrito e resistência do ar ao movimento do brinquedo. Em arquitetura e engenharia, os mecanismos de amortecimento podem ser muito sofisticados.

Mecanismos simples de amortecimento podem ser modelados matematicamente acrescentando à força um termo $-ax'$, proporcional à velocidade. Desta forma, a equação diferencial (7.22) dá lugar a

$$x'' + ax' + b^2x = f(\omega t). \quad (7.23)$$

Supondo que $a > 0$, o termo adicional $-ax'$ aponta em sentido contrário à velocidade, sendo natural esperar que tenha um efeito estabilizador sobre o movimento. Já se $a < 0$, este termo adicional deverá ter o efeito contrário, aumentando a instabilidade.

Objetivos:

1. Considere $f(s) = c \operatorname{sen} s$, onde c é um parâmetro real. Analise numericamente as soluções da equação diferencial (7.22) para $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ e diferentes valores de ω , particularmente valores próximos de 1. Represente os resultados graficamente (confira a Figura 7.1). Interprete os resultados e compare-os com as soluções exatas da equação (Exercício 7.20).
2. Ainda para $f(s) = c \operatorname{sen} s$, analise numericamente as soluções da equação diferencial (7.23) para $b = 1$, $c = 2$, $\omega = 1$ e diferentes valores de a , particularmente valores próximos de 0. Represente os resultados graficamente (confira

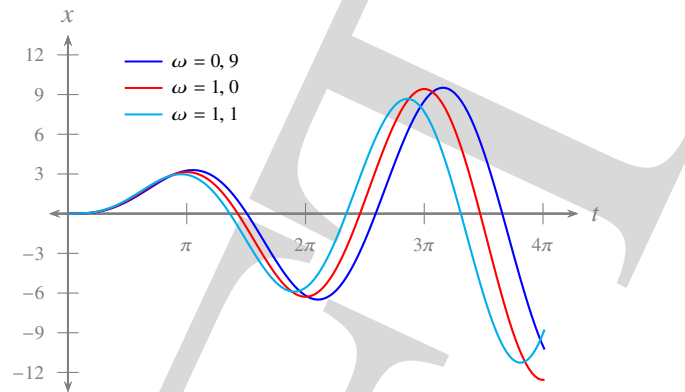


Figura 7.1: Soluções da equação de ressonância (7.22) com $b = 1$, $f(s) = 2 \sin s$ e os seguintes valores da frequência: $\omega = 0,9$, $\omega = 1,0$ e $\omega = 1,1$.

a Figura 7.2). Interprete os resultados e compare-os com as soluções exatas da equação (Exercício 7.22). A expectativa quanto ao efeito do sinal a foi confirmada?

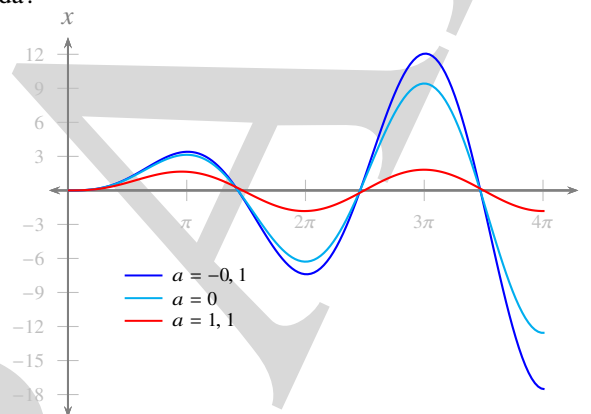


Figura 7.2: Soluções da equação de ressonância (7.23) para $b = 1$, $f(s) = 2 \sin s$, $\omega = 1$ e os seguintes valores do amortecimento: $a = -0,1$, $a = 0$ e $a = 1,1$.

- O que muda no item 1 quando consideramos $f(s) = c_1 \sin s + c_4 \sin 4s$? Analise numericamente a equação diferencial de modo a entender para que valores dos parâmetros ocorre instabilidade por ressonância. Interprete o resultado e discuta o fenômeno da ressonância no contexto geral em que $f(s)$ é uma função periódica qualquer (com período 2π).
- Repita a análise nos itens 1 e 2 com a ação externa sendo dada pela função “empurrão periódico”

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2n\pi \leq s < 2n\pi + \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } (2n+1)\pi \leq s < (2n+2)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

O que muda? Continua sendo verdade que as soluções são amortecidas sempre que $a > 0$?

7.7 Exercícios

Exercício 7.1. Seja $F : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua tal que a equação diferencial $x' = F(t, x)$ tem a propriedade de existência e unicidade de soluções. Suponha que as soluções máximas estão definidas em todo o \mathbb{R} e constituem um espaço vetorial. Mostre que a equação diferencial é linear, ou seja, que F é da forma $F(t, x) = A(t)x$.

Exercício 7.2. Sejam $a : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ uma função contínua e λ um número real tais que a equação diferencial $x'' + \lambda a(t)x = 0$ admite uma solução não identicamente nula com $x(0) = 0$ e $x'(1) = 0$. Mostre que $\lambda > 0$.

Exercício 7.3. Considere a equação diferencial $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, onde $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Suponha que as soluções são *invariantes por translação*: se $x(t)$ é solução então $y(t) = x(t + s)$ também é solução, qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$. Prove que $p(t)$ e $q(t)$ são constantes.

Exercício 7.4. Existe alguma equação diferencial linear homogênea (autônoma ou não) que tenha entre as suas soluções as funções $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\alpha(t) = t^2$ e $\beta(t) = \sin t$? Em caso afirmativo, exiba tal equação.

Exercício 7.5. Sejam $\Gamma, \Delta : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ duas aplicações deriváveis. Mostre que

1. A aplicação $t \mapsto \Gamma(t)\Delta(t)$ é derivável e

$$(\Gamma\Delta)'(t) = \Gamma(t)\Delta'(t) + \Gamma'(t)\Delta(t) \text{ para todo } t \in I.$$

2. Se $\Gamma(t)$ é um isomorfismo para todo t então $t \mapsto \Gamma(t)^{-1}$ é derivável e

$$(\Gamma^{-1})'(t) = -\Gamma(t)^{-1}\Gamma'(t)\Gamma(t)^{-1}.$$

Exercício 7.6. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $x_1, \dots, x_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ soluções da equação $x^k + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$. Defina

$$\Delta(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Mostre que

$$\Delta(t) \exp \left(\int_{t_0}^t a_{k-1}(s) ds \right) = \Delta(t_0) \text{ para todo } t \text{ e } t_0 \in I.$$

Exercício 7.7 (C). Considere a equação linear homogênea $x' = A(t)x$, onde a função $A : (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ é dada por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4t^2 & 1/t \end{pmatrix}.$$

Aproxime numericamente as soluções, para diferentes condições iniciais, usando os métodos de Euler e RKF45. Compare os resultados.

Exercício 7.8. Considere a equação linear homogênea $x'' = a(t)x' + b(t)x$ de ordem 2 e dimensão 1. Seja $\xi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução qualquer tal que $\xi_1(t) \neq 0$ para todo t . Seja $\xi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ outra solução qualquer e represente por W o wronskiano de ξ_1 e ξ_2 . Mostre que

$$\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)' = \frac{W}{\xi_1^2}$$

e deduza que

$$\xi_2(t) = \xi_1(t) \int_{t_0}^t \frac{W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau\right)}{\xi_1(s)^2} ds + c\xi_1(t)$$

onde c é uma constante arbitrária. Note que $\xi_1(t) = \text{sen}(t^2)$ é solução da equação

$$x'' = \frac{1}{t}x' - 4t^2x \text{ em } I = (0, +\infty)$$

e use a observação anterior para encontrar todas as soluções dessa equação.

Exercício 7.9. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ um atrator hiperbólico e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t)\| = 0$. Mostre que toda solução $x(t)$ da equação $x' = Ax + g(t)$ satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

Exercício 7.10. Considere a equação diferencial $x'' + x' + x \text{ sen } t = 0$. Dados $x_0 \in \mathbb{R}$ e $v_0 \in \mathbb{R}$, seja $x(t)$ a solução com condição inicial $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$. Justifique que a aplicação

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(2\pi) \\ x'(2\pi) \end{pmatrix}$$

é linear e o produto dos seus autovalores é $e^{-2\pi}$.

Exercício 7.11. Mostre que se o traço $\text{tr } A(t)$ é identicamente nulo então a aplicação linear B no Teorema de Floquet também tem traço nulo.

Exercício 7.12. Confira que a aplicação B_j dada por (7.21) satisfaz $e^{B_j} = I + N_j$.

Exercício 7.13. Mostre que um isomorfismo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ admite logaritmo real se e somente se todo bloco na Forma Canônica de Jordan correspondente a um autovalor negativo ocorre um número par de vezes.

Exercício 7.14. Mostre que para qualquer isomorfismo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ existe $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tal que $e^B = A^2$. Ou seja, *toda isomorfismo que tem raiz quadrada real tem logaritmo real*. A recíproca também é verdadeira.

Exercício 7.15. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica, com período $T > 0$. Mostre que se $f \leq 0$ então a função nula é a única solução periódica da equação de Hill

$$x'' + f(t)x = 0,$$

Exercício 7.16 (C). Estude numericamente as soluções da equação de Hill $x'' - t^2x = 0$ perto da origem.

Exercício 7.17 (C). Considere $x'' = x \sin t$, ou seja, a equação de Mathieu (7.19) com parâmetros $a = 0$ e $b = 1$.

1. Calcule numericamente, no intervalo $[0, 2\pi]$, as soluções $(x(t), y(t))$ correspondentes às condições iniciais $(t_0, x_0, y_0) = (0, 1, 0)$ e $(t_0, x_0, y_0) = (0, 0, 1)$. Em cada um dos dois casos, calcule $(x(2\pi), y(2\pi))$.
2. Use os resultados do item anterior para calcular numericamente uma matriz (real ou complexa) B como no Teorema de Floquet, ou seja, tal que toda solução fundamental tem a forma $X(t) = C(t)e^{tB}$ com $C(t)$ periódica de período 2π .
3. Calcule os valores característicos da matriz B e use essa informação para discutir o comportamento das soluções da equação diferencial quando $t \rightarrow +\infty$.
4. Repita os passos 1 a 3 para outros valores dos parâmetros a e b e analise o modo como o comportamento das soluções varia com os parâmetros.
5. Repita os passos 1 a 3 para a equação diferencial no Exercício 7.10.

Exercício 7.18 (C). O método de Euler *regressivo* é semelhante ao método de Euler, exceto que no lugar de $x_{n+1} = x_n + hF(t_n, x_n)$, usamos

$$x_{n+1} = x_n + hF(t_{n+1}, x_{n+1}). \quad (7.24)$$

Escreva este método numérico em código do MATLAB/Octave, ou de outro ambiente computacional. Use esse código para aproximar a solução do problema $x' = -cx$ com $x(0) = 1$ para $c = 15$ no intervalo $[0, 1]$ usando $h = 2^{-n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Como se comportam as soluções para $n = 1, 2$ e 3 ? Compare os resultados obtidos com a solução exata $x(t) = e^{-ct}$ e com as conclusões do Exercício 4.19.

[Observação: A relação (7.24) *não* define x_{n+1} explicitamente: para obter o seu valor é necessário resolver a equação, por exemplo, usando o método de Newton (veja o Apêndice B). Isto aumenta o custo computacional mas, ainda assim, métodos regressivos (ou *implícitos*) são úteis porque eles são mais estáveis que as suas versões diretas (ou *explícitas*). Voltaremos ao tema na Seção 12.5.]

Exercício 7.19 (C). O método de Crank-Nicolson é uma combinação do método de Euler (direto) e do método de Euler regressivo: a relação de recorrência é

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} \left(F(t_n, x_n) + F(t_{n+1}, x_{n+1}) \right). \quad (7.25)$$

Escreva o método de Crank-Nicolson em código do MATLAB/Octave, ou de outro ambiente computacional.

Exercício 7.20. Encontre as soluções do oscilador harmônico forçado periodicamente

$$x'' + b^2x = c \sin(\omega t),$$

para todos os valores dos parâmetros b , c e ω . Represente graficamente as soluções para $b = 1$, $c = 2$ e diferentes valores de ω , especialmente valores próximos de 1. Para quais valores de ω as soluções são limitadas para toda condição inicial?

[Dica: Trata-se de uma equação linear autônoma não homogênea.]

Exercício 7.21 (C). Resolva a equação diferencial no Exercício 7.20 numericamente, usando os métodos de Euler, direto e regressivo, e o método de Crank-Nicolson. Represente as soluções graficamente as soluções e compare com os resultados no Exercício 7.20.

Exercício 7.22. Encontre as soluções do oscilador harmônico forçado periodicamente com amortecimento

$$x'' + ax' + b^2x = c \operatorname{sen}(\omega t),$$

para todos os valores dos parâmetros a , b , c e ω . Represente graficamente as soluções para $b = 1$, $c = 2$, $\omega = 1$ e diferentes valores de a , especialmente valores próximos de 0. Para quais valores de a as soluções são limitadas para toda condição inicial?

Exercício 7.23 (C). Resolva a equação diferencial no Exercício 7.22 numericamente, usando os métodos de Euler, direto e regressivo, e o método de Crank-Nicolson. Represente as soluções graficamente as soluções e compare com os resultados no Exercício 7.22.

Exercício 7.24. Considere a seguinte modificação do pêndulo harmônico, que é uma variação do chamado *pêndulo de Kapitza*:

$$x'' + (1 + h(t)) \operatorname{sen} x = 0, \quad (7.26)$$

onde h é a função periódica de período 2τ tal que $h(t) = a$ se $0 \leq t < \tau$ e $h(t) = -a$ se $\tau \leq t < 2\tau$. As soluções $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv \pi$ são equilíbrios da equação e suas respectivas linearizações de (7.26) são:

$$X'' + (1 + h(t))X = 0 \quad \text{e} \quad X'' - (1 + h(t))X = 0. \quad (7.27)$$

Para cada uma destas duas equações lineares:

1. Encontre a solução fundamental $t \mapsto \Gamma(t)$ com condição inicial $\Gamma(0) = \operatorname{Id}$.
2. Estude os valores característicos de $\Gamma(2\tau)$. Em que condições eles são reais? Em que condições temos estabilidade, no sentido de que todas as soluções são limitadas?

[Observação: A equação (7.26) modela a situação em que o ponto de apoio do pêndulo está sujeito a uma força periódica apontando alternadamente para cima e para baixo. O objetivo neste exercício e no seguinte é observar que para escolhas adequadas de tal força a posição do pêndulo invertido, com $x = \pi$, pode tornar-se estável.]

Exercício 7.25 (C). Resolva a equação (7.26) numericamente para diferentes valores dos parâmetros a (amplitude) e τ (período) e diferentes condições iniciais, especialmente perto de $x = 0$ e de $x = \pi$. Como variam os números λ_1 e λ_2 com esses parâmetros? Investigue as estabilidade das soluções estacionárias $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv \pi$.

7.8 Notas

A versão (7.14) da Fórmula de Liouville–Ostrogradskii para equações diferenciais lineares foi obtida em 1838 por Liouville [63] e por Ostrogradskii [66, páginas 124 a 126]. O caso particular para ordem $k = 2$ havia sido obtido em 1827 pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802–1829) e é conhecido como Fórmula de Abel [1]. A versão geral (7.8) foi provada por Liouville [63] em 1838 e por Jacobi [49, página 403], em 1845.

O matemático francês Joseph Liouville (1809–1882) desenvolveu a maior parte da sua carreira na École Polytechnique e no Collège de France. Trabalhou em diversas áreas da Matemática, tais como a Análise Complexa, a Teoria dos Números, a Mecânica Clássica, a Física Matemática e a Geometria Diferencial, além da Astronomia. Por essa razão, existem Teoremas de Liouville em muitos domínios distintos. O mais conhecido é o resultado de Análise Complexa que diz que *as constantes são únicas funções inteiras (ou seja, analíticas em todo o plano complexo) limitadas*. Na Mecânica, além de provar a fórmula (7.8), Liouville introduziu a noção de *variáveis ação-ângulo* para descrever os sistemas hamiltonianos completamente integráveis (*integrabilidade de Liouville*).

Mikhail Vasilyevich Ostrogradskii (1801–1862) nasceu na Ucrânia, que na época fazia parte do Império Russo, e desenvolveu a maior parte da sua carreira na capital do império, São Petersburgo. Trabalhou em diversos problemas da Teoria dos Números, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Cálculo das Variações, além da Matemática Aplicada, da Física Matemática e da Mecânica Clássica. Outros dois resultados de Ostrogradskii muito citados na literatura são o Teorema do Divergente de Gauss (ou Gauss–Ostrogradskii) e o método de Hermite (ou Hermite–Ostrogradskii) para integração de funções racionais.

O matemático alemão Carl Gustav Jacobi (1804–1851) trabalhou nas universidades de Berlim e de Königsberg, tendo sido o primeiro matemático judeu a ocupar uma posição de professor universitário na Alemanha. Ele desenvolveu a Teoria das Funções Elípticas e também deu diversas contribuições fundamentais às Equações Diferenciais, aos Sistemas Dinâmicos e à Teoria dos Números. As noções de *jacobiano* e de *matriz jacobiana* de uma aplicação diferenciável registram o seu papel pioneiro na teoria dos determinantes.

Além de matemático, o polonês Józef Maria Hoene-Wroński (1776–1853) foi físico, inventor, advogado, economista e filósofo messiânico. À sua morte as suas teorias estavam desacreditadas, mas o seu trabalho em Matemática veio a ser reconhecido posteriormente. Insatisfeito com o trabalho de Lagrange sobre o uso de séries infinitas, em 1812 Wroński introduziu um novo tipo de expansão em série de uma função cujos coeficientes são dados na forma de determinantes. Eles foram apelidados *wronskianos* pelo matemático escocês Thomas Muir (1844–1934) em seu tratado sobre a teoria dos determinantes [76], publicado em 1882.

O método da variação do parâmetro foi desenvolvido numa série de trabalhos de Euler, entre 1748 e 1753, e de Lagrange, entre 1766 e 1810, dedicados ao estudo do movimento dos corpos celestes. Ambos buscavam calcular as trajetórias de planetas, satélites e cometas quando se leva em conta a perturbação causada pelas atrações gravitacionais mútuas entre esses objetos, e não apenas a atração do Sol. Em poucas palavras, a estratégia foi partir das soluções do problema homogêneo, em que as atrações

gravitacionais mútuas são ignoradas (*movimento kepleriano*), e tomar como parâmetros variáveis as constantes do movimento kepleriano, para obter as soluções do problema não homogêneo.

O matemático de origem italiana J.L. Lagrange (1736-1813) foi substituído de Euler em Berlim quando Euler voltou a São Petersburgo em 1766 a convite da imperatriz Catarina II da Rússia, e permaneceria nesse cargo até 1787, quando se mudou para Paris. Lagrange deu contribuições fundamentais à Análise, à Mecânica Clássica, à Mecânica Clássica e à Teoria dos Números.

Lagrange foi um dos criadores do Cálculo das Variações, deduzindo a importante equação de Euler–Lagrange, o que também o conduziu ao conhecido *método dos multiplicadores* para encontrar os extremos de funções sujeitas a condições. O seu tratado *Mécanique analytique* [56, 57] teve um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática Física no século XIX. Também introduziu a noção de *solução fundamental* [55, página 473], por volta de 1765, embora a denominação só tenha surgido em 1866, no trabalho [31, página 117] do matemático alemão Lazarus Immanuel Fuchs (1833–1902).

O método da variação dos parâmetros também pode ser aplicado a certas equações diferenciais parciais, especialmente a equações lineares não homogêneas de evolução, tais como a equação do calor, a equação de onda e a equação da placa vibrante. Neste contexto ele costuma ser chamado *princípio de Duhamel*, em homenagem ao matemático e físico francês Jean-Marie Duhamel (1797–1872), que o aplicou pela primeira vez à equação não homogênea do calor.

O matemático francês Achille Marie Gaston Floquet (1847–1920) é conhecido, sobretudo, por seu trabalho em Análise e Equações Diferenciais. Floquet desenvolveu a sua carreira na Universidade de Nancy (França). A sua atuação como diretor da Faculdade de Ciências contribuiu para fazer dessa cidade o segundo centro científico da França, depois de Paris.

A equação de Hill foi introduzida em 1886 pelo matemático e astrônomo americano George William Hill (1838–1914), no estudo da estabilidade do movimento da Lua. Ela aparece em outros contextos da Física e também é um exemplo importante de equação diferencial com coeficientes periódicos. A equação de Mathieu (7.19) é um caso particular.

O método de Crank-Nicolson foi proposto em 1947 no trabalho [25] do britânico John Crank (1916–2006) e da também britânica Phyllis Nicolson (1917–1968). Originalmente, a principal motivação era o estudo numérico das equações diferenciais parciais, especialmente da Equação do Calor:

$$\partial_t u = \alpha \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u.$$