

Capítulo 5

Equações autônomas

Neste capítulo vamos analisar de modo especial as equações diferenciais $x' = F(t, x)$ em que a função F não depende do tempo t , as quais são chamadas *equações autônomas*. Em outras palavras, estamos falando das equações diferenciais da forma

$$x' = F(x), \quad (5.1)$$

onde agora $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua definida num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ (no lugar de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+d}$). Diremos que F é um *campo de vetores* no domínio \mathcal{U} , o qual será chamado *espaço de fase* da equação.

A principal característica das equações diferenciais autônomas, que justifica este tratamento diferenciado, é a seguinte propriedade: Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução de (5.1) então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a função $\gamma_a : I - a \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida no intervalo $I - a = \{s - a : s \in I\}$ por $\gamma_a(t) = \gamma(t + a)$ também é solução de (5.1). De fato,

$$(\gamma_a)'(t) = \gamma'(t + a) = F(\gamma(t + a)) = F(\gamma_a(t)) \text{ para todo } t \in I - a.$$

Isto também quer dizer que no caso das equações autônomas o valor de t_0 na condição inicial não é importante; se γ é solução (maximal) da equação (5.1) com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$ então $\beta = \gamma_{t_0}$ é solução (maximal) de (5.1) com condição inicial $\beta(0) = x_0$. Logo, ao tratar de equações diferenciais autônomas sempre podemos considerar $t_0 = 0$, sem perda de generalidade.

A partir daqui suporemos que a equação (5.1) tem a propriedade de unicidade de soluções. Em vista do que acabamos de dizer, isto significa que para cada $x_0 \in \mathcal{U}$ existe uma única solução maximal com condição inicial $\gamma(0) = x_0$.

As observações anteriores permitem visualizar as soluções de (5.1) de um ponto de vista global, que será muito útil para o que segue e que perpassa toda a teoria moderna das equações diferenciais. Em poucas palavras, no lugar de atentarmos para cada solução individualmente, visualizaremos o conjunto de todas as soluções, simultaneamente, como uma família de transformações no domínio \mathcal{U} .

Mais precisamente, para cada $t \in \mathbb{R}$ chamaremos *tempo- t* da equação à transformação f^t que associa a (certos) pontos $x_0 \in \mathcal{U}$ o valor $\gamma(t)$ da solução maximal γ com condição inicial $\gamma(0) = x_0$:

$$f^t : \gamma(0) \mapsto \gamma(t).$$

Chamaremos *fluxo* de (5.1) à família $(f^t)_t$, formada por estas transformações. Observe que o domínio de cada f^t é o subconjunto \mathcal{U}_t dos pontos $x_0 \in \mathcal{U}$ para os quais $\gamma(t)$ está definido, ou seja, tais que t está no domínio da solução maximal γ . Diremos que o fluxo é *completo* se $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ ou, equivalentemente, se toda solução maximal de (5.1) está definida em todo \mathbb{R} . Estas noções serão estudadas na Seção 5.1.

O Teorema do Fluxo Tubular, que apresentaremos na Seção 5.2, afirma que na vizinhança de qualquer ponto de \mathcal{U} onde o campo de vetores é não nulo sempre existe uma mudança de coordenadas (um difeomorfismo) que “retifica” o fluxo, no sentido de que nas novas coordenadas as soluções são dadas por retas percorridas com velocidade constante unitária:

$$t \mapsto (t, \xi_2, \dots, \xi_d).$$

Em particular, a menos de tal mudança de coordenadas, *o comportamento das soluções de (5.1) na vizinhança de um ponto regular é sempre o mesmo, para qualquer campo de vetores em dimensão d .*

O Teorema do Fluxo Tubular tem algumas aplicações importantes. Uma delas é a construção das chamadas *transformações de Poincaré*, que estão entre as ferramentas básicas mais úteis da teoria qualitativa das equações diferenciais. Trata-se de aplicações

$$P : S'_0 \rightarrow S''_1$$

entre hipersuperfícies transversais ao campo de vetores, obtidas por projeção ao longo das soluções da equação diferencial. Frequentemente, o estudo destas transformações é mais fácil do que a análise direta do fluxo, porque se trata de sistemas com tempo discreto e, também, porque estão definidas em espaços com dimensão menor ($d - 1$, em lugar de d). Por outro lado, muitas vezes é possível obter informação importante sobre as soluções da equação diferencial (por exemplo, na vizinhança de uma solução periódica) a partir do comportamento de suas transformações de Poincaré. Este tema será elaborado na Seção 5.3.

A conclusão do Teorema do Fluxo Tubular também nos conduz naturalmente ao *problema do isomorfismo*: *quando é que dois fluxos devem ser considerados como sendo essencialmente o mesmo?* Por exemplo, em Álgebra dizemos que dois grupos são isomorfos se existe uma bijeção entre eles que respeita as operações de grupo e em Topologia dizemos que dois espaços topológicos são homeomorfos se existe um homeomorfismo de um espaço no outro, isto é, uma bijeção contínua com inversa contínua. Qual é a noção correspondente a essas na teoria das Equações Diferenciais? Na Seção 5.4 discutiremos não apenas uma, mas duas noções com esse sentido: *conjugação* e *equivalência* de fluxos. Ambas retornarão posteriormente.

Finalmente, na Seção 5.5 enunciaremos o Teorema de Recorrência de Poincaré, que é um belo exemplo da força da abordagem qualitativa das equações diferenciais. O teorema afirma que se o fluxo é completo e conserva o volume, isto é, satisfaz

$$\text{vol}(f^t(X)) = \text{vol}(X) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e todo conjunto mensurável } X \subset \mathcal{U},$$

então quase toda órbita ou vai para infinito ou se acumula de volta no próprio ponto de partida. Como a propriedade de conservação do volume é bastante comum em modelos de fenômenos naturais, este resultado tem diversas consequências interessantes.

5.1 Fluxo de uma equação autônoma

Começemos com algumas definições precisas de conceitos mencionados acima. Chamamos *trajetória* (ou *órbita*) de um ponto $x \in \mathcal{U}$ à solução maximal

$$\gamma_x : I_x \rightarrow \mathcal{U}$$

da equação (5.1) com condição inicial $\gamma_x(0) = x$. Também nos referiremos à imagem $\{\gamma_x(t) : t \in I_x\}$ da solução γ_x como a trajetória de x .

Para cada $t \in \mathbb{R}$, chamamos *transformação tempo- t* da equação (5.1) à aplicação

$$f^t : \{x \in \mathcal{U} : t \in I_x\} \rightarrow \mathcal{U}, \quad f^t(x) = \gamma_x(t).$$

A família $(f^t)_t$ destas transformações é chamada *fluxo* da equação (5.1). Dizemos que a equação (5.1) é *completa* (ou que o seu *fluxo* é *completo*) se $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Nesse caso, a transformação f^t está definida em \mathcal{U} para todo $t \in \mathbb{R}$.

Com estas notações, a trajetória de $x \in \mathcal{U}$ é a curva $I_x \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $t \mapsto f^t(x)$. Na proposição a seguir reunimos as principais propriedades do conceito de fluxo. Representamos por $Df^t(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ a derivada (com respeito a x) da aplicação f^t em um ponto x do seu domínio. Usamos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ para representar o espaço das aplicações lineares de \mathbb{R}^d em \mathbb{R}^d .

Proposição 5.1. *Seja $(f^t)_t$ o fluxo da equação (5.1) e seja $\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U} : t \in I_x\}$. Então:*

1. $f^0(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{U}$;
2. $f^s(f^t(x)) = f^{s+t}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$ e quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ com $t \in I_x$ e $s+t \in I_x$;
3. a aplicação $\gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $(t, x) \mapsto f^t(x)$ é contínua e ela é de classe C^k se o campo de vetores F é de classe C^k ;
4. se o campo de vetores F é de classe C^1 então a aplicação $t \mapsto Df^t(x)$ é solução da equação diferencial linear

$$X' = DF(f^t(x))X, \quad X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d). \quad (5.2)$$

Demonstração. A propriedade (1) segue imediatamente da definição:

$$f^0(x) = \gamma_x(0) = x.$$

A propriedade (2) é consequência da unicidade de soluções. De fato, para cada $t \in I_x$ fixado, considere a função definida por

$$\beta(s) = f^{s+t}(x) = \gamma_x(s+t) = \gamma_x^t(s).$$

Então, tal como observamos no início deste capítulo, β é a solução maximal de (5.1) com condição inicial $\beta(0) = \gamma_x(t) = f^t(x)$ e o seu domínio de definição é $I_x - t$. Logo, por unicidade,

$$\beta(s) = \gamma_{f^t(x)}(s) = f^s(f^t(x)) \text{ para todo } s \in I_x - t,$$

tal como queríamos provar.

A propriedade (3) está contida no Teorema da Dependência Contínua (Teorema 2.22) e no Teorema da Dependência Diferenciável (Teorema 2.30).

Finalmente, a propriedade (4) é um caso particular do Exercício 2.19. \square

5.1.1 Trajetórias regulares, periódicas e estacionárias

Uma consequência interessante da Proposição 5.1 é que *para equações autônomas com unicidade de soluções, duas trajetórias nunca se intersectam, a menos que sejam exatamente a mesma trajetória módulo translação no tempo*. Mais especificamente,

Corolário 5.2. *Sejam $x, y \in \mathcal{U}$ e suponha que $f^a(x) = f^b(y)$ para algum $a \in I_x$ e $b \in I_y$. Então $I_y = I_x + (b - a)$ e*

$$f^t(x) = f^{t+(b-a)}(y) \text{ para todo } t \in I_x.$$

Em particular, se $f^a(x) = f^b(x)$ para tempos $a \in I_x$ e $b \in I_x$ distintos então $I_x = \mathbb{R}$ e

$$f^t(x) = f^{t+(b-a)}(x) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Seja $z = f^a(x) = f^b(y)$. Pela parte (2) da Proposição 5.1,

$$f^s(z) = f^{s+a}(x) \text{ para todo } s \in I_z = I_x - a \quad \text{e}$$

$$f^s(z) = f^{s+b}(y) \text{ para todo } s \in I_z = I_y - b.$$

Segue que $I_y = I_x + (b - a)$ e

$$f^s(x) = f^{s-a}(z) = f^{s-a+b}(y) \text{ para todo } s \in I_x.$$

Isto prova a primeira afirmação. Na segunda afirmação supomos que $x = y$ e $a \neq b$. Resulta da primeira afirmação que $I_x = I_x + (b - a)$ e, como I_x é um intervalo, isto só pode acontecer se $I_x = \mathbb{R}$. O restante da segunda afirmação está contido na primeira. \square

Este corolário permite classificar as trajetórias de qualquer equação autônoma em três tipos distintos (veja também o Exercício 5.1):

- *trajetória periódica (ou fechada)* se $I_x = \mathbb{R}$ e existe $T > 0$ tal que $f^t(x) = f^{t+T}(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; então dizemos que x é um *ponto periódico*;
- *trajetória regular não periódica (ou aberta)* se $f^s(x) \neq f^t(x)$ para quaisquer $s, t \in I_x$ com $s \neq t$; então dizemos que x é um *ponto regular não periódico*;
- *trajetória estacionária (ou constante)* se $I_x = \mathbb{R}$ e $f^t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$; então dizemos que x é um *ponto estacionário*;

É claro que, de acordo com estas definições, as trajetórias estacionárias são um caso particular das trajetórias periódicas (podemos tomar qualquer $T > 0$). No entanto, trata-se de um caso muito especial, que merece tratamento diferenciado. Por essa razão, *sempre que nos referirmos a trajetórias periódicas estaremos, implicitamente, excluindo o caso estacionário*.

Observação 5.3. Um ponto $x \in \mathcal{U}$ é estacionário se e somente se $F(x) = 0$. De fato, se $\gamma_x(t) = f^t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então

$$F(x) = F(\gamma_x(t)) = \gamma'_x(t) = 0$$

(para qualquer t). Reciprocamente, se $F(x) = 0$ então a função constante $\gamma(t) = x$ é solução da equação diferencial. Logo, por unicidade, ela é a trajetória de x .

Dizemos que $x \in \mathcal{U}$ é *ponto regular* se ele não é ponto estacionário, ou seja, se $F(x) \neq 0$. Correspondentemente, chamamos *trajetória regular* a toda trajetória não estacionária, incluindo as trajetórias periódicas não estacionárias.

Outra consequência interessante da Proposição 5.1 é o seguinte:

Corolário 5.4. Seja $\gamma_q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f^t(q)$ a trajetória de qualquer ponto $q \in \mathcal{U}$. Se existe

$$\lim_{t \rightarrow b} f^t(q) = p \in \mathcal{U},$$

então $b = +\infty$ e p é um ponto estacionário. Vale um resultado análogo substituindo b por a .

Demonstração. Fixe $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que $\overline{B_\delta(p)} \subset \mathcal{U}$. A hipótese implica que existe $\tau \in (a, b)$ tal que $f^t(q) \in \overline{B_\delta(p)}$ para todo $t \geq \tau$. Então, como $\overline{B_\delta(p)}$ é compacto, segue do Teorema 3.5 que $b = +\infty$. Em seguida, pelo Teorema da Dependência Contínua (Teorema 2.22), existe $\rho > 0$ tal que $f^t(x)$ está definida para todo $(t, x) \in [-\rho, \rho] \times \overline{B_\rho(p)}$. A hipótese implica que $f^t(q)$ está em $B_\rho(p)$ para todo t suficientemente grande. Fixe qualquer $s \in [-\rho, \rho]$. Por continuidade, usando a parte (2) da Proposição 5.1, segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(q) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{s+t}(q) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f^s(f^t(q)) = f^s(p).$$

Por unicidade do limite, isto implica que $f^s(p) = p$ para todo $s \in [-\rho, \rho]$. Segue que $F(p) = 0$, tal como afirmado. \square

5.1.2 Equações completas

Os resultados das Seções 3.2 e 3.3 fornecem algumas condições suficientes para que a equação diferencial (5.1) seja completa. Primeiro, vamos explicitar dois resultados nesta linha.

Corolário 5.5. Suponha que para todo $x \in \mathcal{U}$ existe algum compacto $K_x \subset \mathcal{U}$ tal que $f^t(x) \in K_x$ para todo $t \in I_x$. Então o fluxo de (5.1) é completo.

Demonstração. Segue diretamente do Corolário 3.6. \square

Corolário 5.6. Suponha que o campo de vetores $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é (globalmente) lipschitziano, com constante de Lipschitz C . Então o fluxo de (5.1) é completo e satisfaz

$$\|f^t(x) - f^t(y)\| \leq e^{C|t|} \|x - y\| \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e quaisquer } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Demonstração. É um caso particular do Teorema 3.8. \square

Também queremos ressaltar a seguinte consequência da Proposição 5.1:

Corolário 5.7. *Supondo que o fluxo é completo, as transformações tempo- t são homeomorfismos de \mathcal{U} satisfazendo*

$$f^0 = \text{id} \quad \text{e} \quad f^{s+t} = f^s \circ f^t \quad \text{para quaisquer } s, t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se F é de classe C^k então $f^t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é difeomorfismo de classe C^k , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. As afirmações (3) e (4) na Proposição 5.1 garantem que f^t é contínua e que ela é de classe C^k se F é de classe C^k . Além disso, as afirmações (1) e (2) na mesma proposição implicam que

$$f^t \circ f^{-t} = f^{-t} \circ f^t = f^0 = \text{id} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f^t é um homeomorfismo e é um difeomorfismo de classe C^k se o campo de vetores F for de classe C^k . \square

Então, podemos ver um fluxo (completo) como uma aplicação

$$t \mapsto f^t \tag{5.3}$$

da reta \mathbb{R} no espaço $\text{Homeo}(\mathcal{U})$ dos homeomorfismos (ou no espaço $\text{Difeo}^k(\mathcal{U})$ dos difeomorfismos de classe C^k) de \mathcal{U} . Como sabemos, a reta é um grupo relativamente à operação de adição e $\text{Homeo}(\mathcal{U})$ e $\text{Difeo}^k(\mathcal{U})$ são também grupos, relativamente à operação de composição de funções. A afirmação (2) na Proposição 5.1 significa que a aplicação (5.3) é um *homomorfismo de grupo*. Por esta razão, fluxos também são chamados *grupos a um parâmetro* de transformações.

5.1.3 Equações não autônomas ou de ordem superior

Na verdade, esta discussão não é tão específica de equações autônomas (de ordem 1) quanto possa parecer à primeira vista. A razão é que equações não autônomas podem também ser escritas em forma autônoma, desde que aceitemos aumentar a dimensão do espaço ambiente. Esse é o tema da presente seção.

Inicialmente, observemos que é sempre possível reduzir uma equação diferencial de ordem 1,

$$x' = F(t, x), \tag{5.4}$$

a uma equação autônoma, do seguinte modo. Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+d}$ o domínio de F e considere a função

$$G : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{1+d}, \quad G(s, x) = (1, F(s, x)).$$

Existe uma correspondência bijetiva entre as soluções de (5.4) e as soluções da equação diferencial autônoma

$$y' = G(y), \quad y \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+d} \tag{5.5}$$

que passamos a descrever. Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, denotamos $X - a = \{x - a : x \in X\}$. Dado qualquer $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de (5.4) com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$ então

$$\beta : I - t_0 \rightarrow \mathcal{U}, \quad \beta(t) = (t + t_0, \gamma(t + t_0))$$

é solução de (5.5) com condição inicial $\beta(0) = (t_0, x_0)$, já que, para todo $t \in I - t_0$,

$$\beta'(t) = (1, \gamma'(t + t_0)) = (1, F(t + t_0, \gamma(t + t_0))) = G(t + t_0, \gamma(t + t_0)) = G(\beta(t)).$$

Reciprocamente, seja $\beta : J \rightarrow \mathcal{U}$ uma solução de (5.5) com condição inicial $\beta(0) = (t_0, x_0)$. Escreva $\beta(t) = (s(t), \alpha(t))$ para cada $t \in J$ e defina $\gamma(t) = \alpha(t - t_0)$ para $t \in J + t_0$. Então, (5.5) significa que

$$s'(t) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha'(t) = F(s(t), \alpha(t)) \quad \text{para todo } t \in J.$$

A primeira igualdade dá que $s(t) = t + t_0$ para todo $t \in J$. Então, a segunda igualdade dá que

$$\gamma'(t + t_0) = F(t + t_0, \gamma(t + t_0)) \quad \text{para todo } t \in J,$$

isto quer dizer que $\gamma : J + t_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução de (5.4), com condição inicial $\gamma(t_0) = \alpha(0) = x_0$.

Resumindo estas observações, o fluxo da equação autônoma (5.5) está dado por

$$f^t(s, x) = (s + t, \gamma_{s,x}(s + t))$$

onde $\gamma_{s,x}$ designa a solução maximal de (5.4) com condição inicial $\gamma_{s,x}(s) = x$.

Mais geralmente, combinando a construção anterior com aquela que apresentamos na Seção 2.5.1, podemos reduzir qualquer equação diferencial

$$x^{(k)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}), \quad (5.6)$$

à equação diferencial autônoma de ordem 1

$$y' = G(y), \quad y \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+kd}, \quad (5.7)$$

onde $y = (s, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathcal{U}$ e

$$G(s, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (1, x_1, \dots, x_{k-1}, F(s, x_0, \dots, x_{k-1})).$$

Deixamos ao cuidado do leitor verificar que a solução maximal $\Gamma(t)$ da equação (5.7) com condição inicial $\Gamma(0) = (t_0, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k-1)})$ está dada por

$$\Gamma(t) = (t + t_0, \gamma(t + t_0), \gamma^{(1)}(t + t_0), \dots, \gamma^{(k-1)}(t + t_0))$$

onde $\gamma = \gamma_{t_0, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k-1)}}$ é a solução maximal de (5.6) com condição inicial

$$\gamma(t_0) = x_0, \quad \gamma^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \quad \dots, \quad \gamma^{(k-1)}(t_0) = x_0^{(k-1)}.$$

Portanto, o fluxo da equação autônoma (5.7) está dado por

$$f^t(s, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (s + t, \gamma(s + t), \gamma^{(1)}(s + t), \dots, \gamma^{(k-1)}(s + t)), \quad \gamma = \gamma_{s, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}}.$$

5.2 Teorema do Fluxo Tubular

Nesta seção vamos estudar o comportamento de soluções da equação (5.1) na vizinhança de um ponto regular. O principal resultado é o Teorema 5.8, o qual descreve a forma geral de um fluxo, próximo de qualquer ponto regular. Em tudo o que segue suporemos que o campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ em (5.1) é de classe C^k para algum $k \geq 1$.

Considere o campo de vetores $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definido por

$$G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = (1, 0, \dots, 0).$$

É claro que o fluxo da equação diferencial $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)' = G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ está dado por

$$g^t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = (\xi_1 + t, \xi_2, \dots, \xi_d) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

O teorema a seguir afirma que este fluxo simples é um modelo geral para as soluções de qualquer equação diferencial autônoma na vizinhança de um ponto regular. Veja a Figura 5.1.

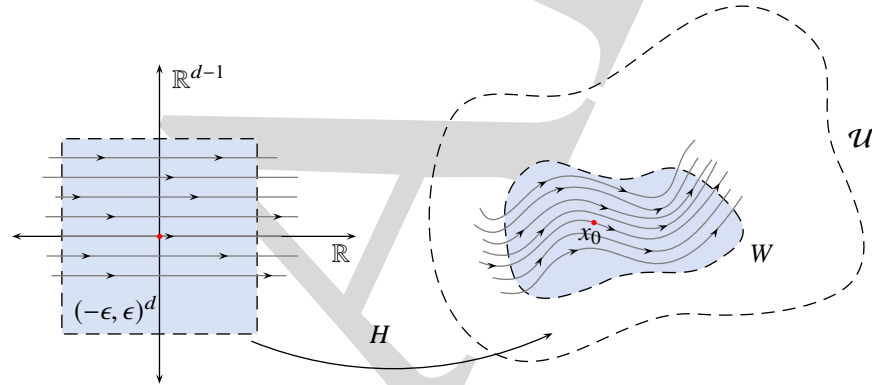


Figura 5.1: Fluxo tubular.

Teorema 5.8 (Fluxo Tubular). *Seja $x_0 \in \mathcal{U}$ um ponto regular de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k . Então existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança W de x_0 e um difeomorfismo $H : (-\epsilon, \epsilon)^d \rightarrow W$ de classe C^k tal que $H(0) = x_0$ e a aplicação*

$$(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto H(t, \xi_2, \dots, \xi_d)$$

é solução da equação (5.1) para todo $(\xi_2, \dots, \xi_d) \in (-\epsilon, \epsilon)^{d-1}$.

Demonstração. Seja $B_1^{d-1}(0)$ a bola unitária de \mathbb{R}^{d-1} e seja $\phi : B_1^{d-1}(0) \rightarrow \mathcal{U}$ um mergulho de classe C^k com $\phi(0) = x_0$. Representamos por $D\phi(0)\mathbb{R}^{d-1}$ a imagem da derivada $D\phi(0)$ de ϕ no ponto 0. No que segue, suporemos que o mergulho é transversal ao campo de vetores no ponto x_0 , ou seja, que

$$D\phi(0)\mathbb{R}^{d-1} \oplus \mathbb{R}F(x_0) = \mathbb{R}^d, \quad (5.9)$$

onde $\mathbb{R}F(x_0) = \{\lambda F(x_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Para qualquer (t, ξ_2, \dots, ξ_d) tal que $t \in I_{\phi(\xi_2, \dots, \xi_d)}$, defina

$$H : (t, \xi_2, \dots, \xi_d) \mapsto f^t(\phi(\xi_2, \dots, \xi_d)) = \gamma_{\phi(\xi_2, \dots, \xi_d)}(t).$$

Por definição, $t \mapsto H(t, \xi_2, \dots, \xi_d)$ é solução de (5.1) para todo (ξ_2, \dots, ξ_d) . Segue do Teorema da Dependência Diferenciável (Teorema 2.30) que H é de classe C^k . Afirmamos que

$$DH(0) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ é um isomorfismo.} \quad (5.10)$$

De fato, por um lado, $H(0, \xi_2, \dots, \xi_d) = \gamma_{\phi(\xi_2, \dots, \xi_d)}(0) = \phi(\xi_2, \dots, \xi_d)$ para todo (ξ_2, \dots, ξ_d) e, portanto, a restrição da derivada $DH(0)$ ao subespaço $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ coincide com $D\phi(0)$:

$$DH(0) | \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1} = D\phi(0). \quad (5.11)$$

Por outro lado, $H(t, 0, \dots, 0) = \gamma_{\phi(0)}(t)$ para todo t e isso implica que a restrição de $DH(0)$ ao subespaço $\mathbb{R} \times \{0\}$ satisfaz:

$$DH(0) | \mathbb{R} \times \{0\} = \gamma'_{\phi(0)}(0) = F(\gamma_{\phi(0)}(0)) = F(\phi(0)) = F(x_0). \quad (5.12)$$

As relações (5.11) e (5.12), juntamente com (5.9), implicam que a imagem de $DH(0)$ é igual a

$$D\phi(0)\mathbb{R}^{d-1} \oplus \mathbb{R}F(x_0) = \mathbb{R}^d.$$

Isto mostra que a aplicação linear $DH(0)$ é sobrejetiva e, portanto, é um isomorfismo, tal como afirmado em (5.10). Então, pelo Teorema da Função Inversa, existe $\epsilon > 0$ tal que a restrição de H a $(-\epsilon, \epsilon)^d$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre uma vizinhança W do ponto x_0 . \square

Chamaremos *seção transversal* ao campo de vetores F em um ponto regular $x_0 \in \mathcal{U}$ à imagem S de qualquer mergulho $\phi : B_1^{d-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k como na demonstração anterior, ou seja tal que $\phi(0) = x_0$ e

$$D\phi(0)\mathbb{R}^{d-1} \oplus \mathbb{R}F(x_0) = \mathbb{R}^d. \quad (5.13)$$

Além disso, uma aplicação $H : (-\epsilon, \epsilon)^d \rightarrow W$ como no Teorema 5.8 será chamada *caixa de fluxo tubular* no ponto $x_0 = H(0)$.

Corolário 5.9. *Se $H : (-\epsilon, \epsilon)^d \rightarrow W$ é caixa de fluxo tubular então*

$$f^t(H(s, \xi_2, \dots, \xi_d)) = H(t + s, \xi_2, \dots, \xi_d) = H(g^t(s, \xi_2, \dots, \xi_d))$$

para todo $(\xi_2, \dots, \xi_d) \in (-\epsilon, \epsilon)^{d-1}$, todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ e todo t tal que $s + t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.8, a aplicação $t \mapsto H(t + s, \xi_2, \dots, \xi_d)$ é solução de (5.1). É claro que o seu valor para $t = 0$ é $H(s, \xi_2, \dots, \xi_d)$. Portanto, $H(t + s, \xi_2, \dots, \xi_d) = f^t(H(s, \xi_2, \dots, \xi_d))$ para todo t . A segunda igualdade no enunciado segue imediatamente da definição de g^t . \square

5.3 Transformações de Poincaré

Continuamos supondo que o campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é de classe C^k para algum $k \geq 1$. Tal como antes, designamos por $(f^t)_t$ o fluxo da equação (5.1) e por $(g^t)_t$ o fluxo definido em (5.8).

5.3.1 Existência e diferenciabilidade

Começamos com uma versão local da construção das transformações de Poincaré: dadas duas seções transversais contidas em uma mesma caixa de fluxo tubular, existe uma projecção P de uma seção transversal para outra ao longo das trajetórias do fluxo e tal projecção é um difeomorfismo de classe C^k . Mais precisamente:

Lema 5.10. *Sejam $x_0 \in \mathcal{U}$ um ponto regular e $H : (\epsilon, \epsilon)^d \rightarrow W$ uma caixa de fluxo tubular no ponto x_0 . Considere seções transversais $S_0 \subset W$ no ponto x_0 e $S_1 \subset W$ em qualquer ponto $x_1 = f^{t_1}(x_0)$ com $t_1 \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então, existe um difeomorfismo $P : S'_0 \rightarrow S''_1$ de classe C^k , onde S'_0 é uma vizinhança de x_0 dentro de S_0 e S''_1 é uma vizinhança de x_1 dentro de S_1 , e existe uma aplicação $\tau : S'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que*

1. $\tau(x_0) = t_1$ e $P(x_0) = x_1$.
2. $P(x) = f^{\tau(x)}(x)$ para todo $x \in S'_0$.

Portanto, $\tau(x)$ é o tempo que a trajetória de $x \in S'_0$ leva para alcançar a seção transversal S''_1 . Para $x = x_0$ esse tempo é igual a t_1 e o ponto de interseção com S''_1 coincide com x_1 .

Demonstração. Sejam $\phi_0, \phi_1 : B_1^{d-1}(0) \rightarrow W$ mergulhos de classe C^k cujas imagens são S_0 e S_1 , respectivamente. Considere

$$\psi_i = H^{-1} \circ \phi_i : B_1^{d-1}(0) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)^d \quad \text{e} \quad \Sigma_i = H^{-1}(S_i) \quad \text{para } i = 0, 1.$$

Como H é um difeomorfismo C^k e envia trajetórias locais de $(g^t)_t$ em trajetórias locais de $(f^t)_t$, cada Σ_i é uma seção transversal ao campo de vetores G no ponto $z_i = H^{-1}(x_i)$. Observe que $z_0 = 0$ e $z_1 = (t_1, 0)$. Então, usando o Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança Y de $0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ e existem funções de classe C^k

$$u_0 : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u_1 : Y \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que $u_0(0) = 0$ e $u_1(0) = t_1$ e, para cada $i = 0, 1$, o gráfico

$$\Sigma'_i = \{(u_i(\xi), \xi) : \xi \in Y\}$$

de u_i é uma vizinhança de z_i dentro de Σ_i . Veja a Figura 5.2.

Então as aplicações

$$\sigma : \Sigma'_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(u_0(\xi), \xi) = u_1(\xi) - u_0(\xi)$$

e

$$Q : \Sigma'_0 \rightarrow \Sigma'_1, \quad Q(u_0(\xi), \xi) = (u_1(\xi), \xi)$$

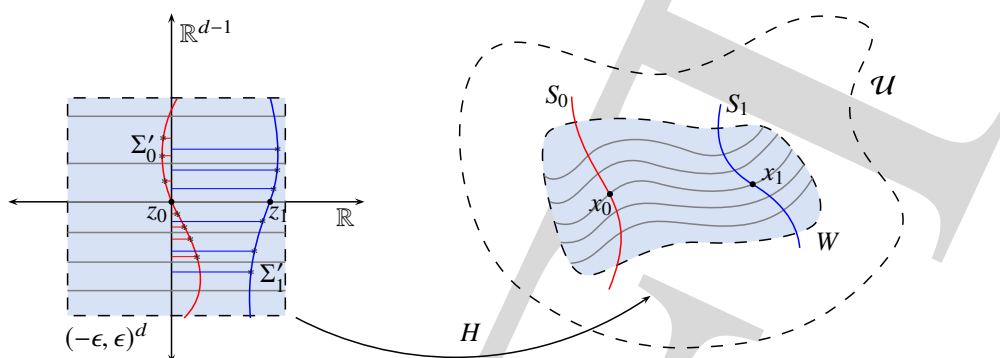


Figura 5.2: Projeção ao longo do fluxo dentro de uma caixa de fluxo tubular.

são de classe C^k e satisfazem $\sigma(0) = t_1$ e $Q(z_0) = z_1$ e

$$Q(z) = g^{\sigma(z)}(z) \text{ para todo } z \in \Sigma'_0.$$

Claro que Q é uma bijeção e a inversa

$$Q^{-1} : \Sigma'_1 \rightarrow \Sigma'_0, \quad (u_1(\xi), \xi) \mapsto (u_0(\xi), \xi),$$

também é de classe C^k . Portanto, Q é um difeomorfismo de classe C^k . Agora defina

$$\begin{aligned} S'_0 &= H(\Sigma'_0) \quad \text{e} \quad S'_1 = H(\Sigma'_1) \\ P &= H \circ Q \circ H^{-1} : S'_0 \rightarrow S'_1 \quad \text{e} \quad \tau = \sigma \circ H^{-1} : S'_0 \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então, $\tau(x_0) = \sigma(0) = t_1$ e P é um difeomorfismo de classe C^k satisfazendo $P(x_0) = x_1$. Além disso, usando o Corolário 5.9,

$$P(x) = H(Q(H^{-1}(x))) = H(g^{\sigma(H^{-1}(x))}(H^{-1}(x))) = f^{\sigma(H^{-1}(x))}(x) = f^{\tau(x)}(x),$$

para todo $x \in S'_0$. \square

O próximo teorema estende a conclusão do Lema 5.10 para quaisquer seções transversais, não necessariamente contidas na imagem de uma caixa de fluxo tubular:

Teorema 5.11 (Transformação de Poincaré). *Sejam $x_0 \in \mathcal{U}$ um ponto regular e $\tilde{x} = f^{\tilde{t}}(x_0)$ um ponto qualquer na trajetória de x_0 . Considere seções transversais $S_0, \tilde{S} \subset \mathcal{U}$ ao fluxo nos pontos x_0 e \tilde{x} , respectivamente. Então, existe um difeomorfismo $P : S'_0 \rightarrow \tilde{S}''$ de classe C^k , onde S'_0 é uma vizinhança de x_0 dentro de S_0 e \tilde{S}'' é uma vizinhança de \tilde{x} dentro de \tilde{S} , e existe uma aplicação $\tau : S'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que*

1. $\tau(x_0) = \tilde{t}$ e $P(x_0) = \tilde{x}$.
2. $P(x) = f^{\tau(x)}(x)$ para todo $x \in S'_0$.

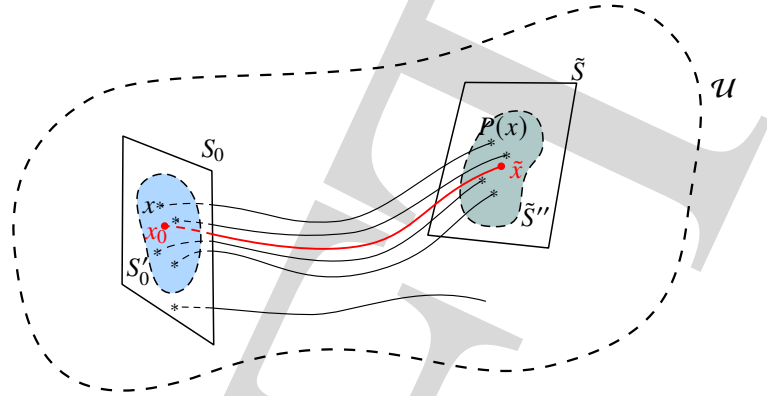


Figura 5.3: Transformação de Poincaré: projeção ao longo do fluxo entre seções transversais.

Demonstração. A ideia é muito simples: vamos construir P e τ concatenando transformações de Poincaré entre seções transversais próximas, dadas pelo Lema 5.10. Veja a Figura 5.3. Para isso, considere o compacto $K = \{f^t(x_0) : t \in [0, \tilde{t}]\}$. Seja $\Phi_j : (-\epsilon, \epsilon)^d \rightarrow W_j, j = 0, \dots, N$ uma família finita de caixas de fluxo tubular tal que

- (i) $\Phi_j(0) \in K$ para todo $j = 0, \dots, N$.
- (ii) $\{W_j : j = 0, 1, \dots, N\}$ cobre K .

Escreva $\Phi_j(0) = f^{t_j}(x_0)$ para $j = 0, \dots, N$. No que segue, suporemos que os Φ_j estão numerados de tal forma que a sequência $(t_j)_j$ é monótona. A menos de acrescentarmos alguns elementos à família $(\Phi_j)_j$, também podemos supor que $\phi_0(0) = x_0$, $\Phi_N(0) = \tilde{x}$ e o ponto $x_j = \Phi_j(0)$ pertence a W_{j-1} para todo $j = 1, \dots, N$. Em particular, $t_0 = 0$ e $t_N = \tilde{t}$. Sejam

$$\phi_j : B_1^{d-1}(0) \rightarrow \mathcal{U}, \quad j = 0, \dots, N,$$

mergulhos de classe C^k transversais a F nos pontos x_j e sejam $S_j, j = 0, \dots, N$ as suas imagens. Não é restrição supor que ϕ_0 e ϕ_N estão escolhidos de tal forma que as suas imagens coincidem com as seções S_0 e \tilde{S} no enunciado.

Pelo Lema 5.10, para cada $j = 0, \dots, N-1$, existe um difeomorfismo $P_j : S'_j \rightarrow S''_{j+1}$ de classe C^k , definido entre uma vizinhança de x_j dentro de S_j e uma vizinhança de x_{j+1} dentro de S_{j+1} , e existe uma aplicação $\tau_j : S'_j \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que

$$\tau_j(x_j) = t_{j+1} - t_j \quad \text{e} \quad P_j(x_j) = x_{j+1} \quad \text{e} \quad P_j(x) = f^{\tau_j(x)}(x) \quad \text{para todo } x \in S'_j.$$

Reduzindo S'_{N-2}, \dots, S'_0 se necessário, podemos supor que $S''_j \subset S'_j$ para todo $j = 1, \dots, N-1$. Então as aplicações

$$\begin{aligned} P : S'_0 &\rightarrow S''_N, & P(x) &= P_{N-1} \circ \dots \circ P_0(x) \\ \tau : S'_0 &\rightarrow \mathbb{R}, & \tau(x) &= \tau_0(x) + \tau_1(P_0(x)) + \dots + \tau_{N-1}(P_{N-2} \circ \dots \circ P_0(x)) \end{aligned}$$

estão bem definidas e são de classe C^k . Além disso,

$$\tau(x_0) = t_N - t_0 = \tilde{t} \quad \text{e} \quad P(x_0) = x_N = \tilde{x} \quad \text{e} \quad P(x) = f^{\tau(x)}(x) \quad \text{para todo } x \in S'_0.$$

Seja \tilde{S}'' a imagem de P . Então, também temos que $P : S'_0 \rightarrow \tilde{S}''$ é um difeomorfismo de classe C^k . \square

5.3.2 Trajetórias periódicas

Transformações de Poincaré são especialmente úteis para analisar o comportamento de trajetórias próximas a soluções periódicas. Nesta seção vamos ilustrar este fato e voltaremos ao tema, de forma mais aprofundada, no Capítulo 10.

Seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto regular periódico, isto é, tal que $f^T(p) = p$ para algum $T > 0$. Seja S uma seção transversal ao campo de vetores F no ponto p . Pelo Teorema 5.11, existem vizinhanças S' e S'' do ponto p dentro de S e existem aplicações de classe C^k

$$P : S' \rightarrow S'' \quad \text{e} \quad \tau : S' \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que $\tau(p) = T$ e $P(z) = f^{\tau(z)}(z)$ para todo $z \in S'$. Em particular, $P(p) = p$. Chamamos P de *transformação de retorno* e a função τ de *tempo de retorno*. Se T é o *período mínimo* de p , ou seja, o menor número positivo tal que $f^T(p) = p$, então P é chamada *transformação de primeiro retorno* e τ é chamado *tempo de primeiro retorno*.

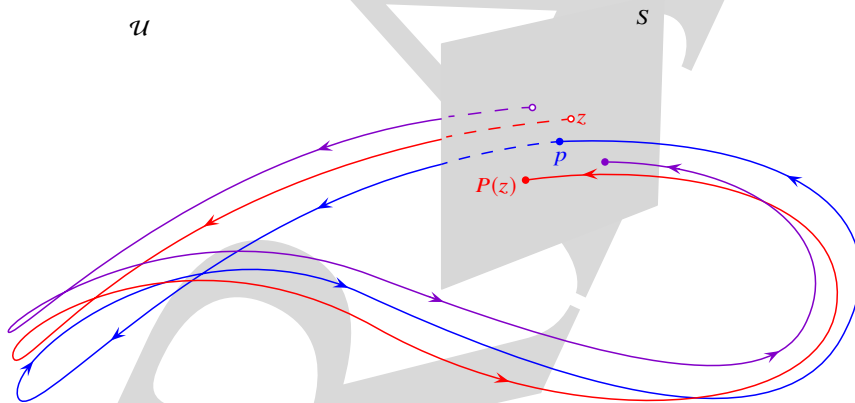


Figura 5.4: Transformação de Poincaré de órbita periódica.

Proposição 5.12. *Seja $z \in S$ tal que $P^n(z)$ está definido para todo $n \geq 0$ e converge para p quando $n \rightarrow \infty$. Então a trajetória de z é assintótica à trajetória $\Gamma = \{f^t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ de p , isto é,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t(z), \Gamma) = 0.$$

Demonstração. Para cada $n \geq 0$, escreva $P^n(z) = f^{t_n}(z)$. Observe que

$$t_{n+1} - t_n = \tau(P^n(z)) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Como $P^n(z) \rightarrow p$ e a função tempo de retorno é contínua, segue que $t_{n+1} - t_n$ converge para T . Em particular, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$t_{n+1} - t_n < T + 1 \text{ para todo } n \geq n_0. \quad (5.14)$$

Pelo Teorema da Dependência Contínua (veja o Exercício 5.2), dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - p\| \leq \delta \text{ implica } \|f^s(x) - f^s(p)\| \leq \epsilon \text{ para todo } s \in [0, T + 1]. \quad (5.15)$$

Tome $n_1 \geq n_0$ tal que $\|P^{n_1}(z) - p\| \leq \delta$ para todo $n \geq n_1$. Então, combinando (5.14) e (5.15),

$$d(f^{s+t_n}(z), \Gamma) \leq \|f^{s+t_n}(z) - f^t(p)\| \leq \epsilon \text{ para todo } s \in [0, t_{n+1} - t_n] \text{ e todo } n \geq n_1,$$

consequentemente, $d(f^t(z), \Gamma) \leq \epsilon$ para todo $t \geq t_{n_1}$. \square

Exemplo 5.13. Dado $\epsilon > 0$, considere a seguinte equação diferencial em \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = -y + \epsilon x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + \epsilon y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (5.16)$$

Observe que a origem é um ponto estacionário. Vamos analisar o comportamento de outras soluções. Fazendo a mudança para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

a equação (5.16) adquire a forma

$$\begin{cases} \theta' = 1, \\ \rho' = \epsilon \rho(1 - \rho^2). \end{cases} \quad (5.17)$$

Note que a função $t \mapsto (\theta(t), \rho(t)) = (t, 1)$ é uma solução desta equação. Em coordenadas cartesianas, isto corresponde a $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$. Trata-se, portanto, de uma solução periódica, com período 2π , cuja imagem é o círculo unitário.

Como trajetórias distintas nunca se intersectam (Corolário 5.2) as trajetórias dos pontos do disco unitário estão confinadas no disco unitário. Em particular (Corolário 5.5), elas estão definidas para todo o tempo. A equação (5.17) também mostra que as semirretas $\theta = \text{constante}$ são transversais ao campo de vetores em todo ponto fora da origem. Fixe $S = \{(\rho, \theta) : \theta = 0\}$. A trajetória $t \mapsto (\rho(t), \theta(t))$ de qualquer ponto $(\rho_0, 0) \in S$ satisfaz $\theta(t) = t$ e, portanto, regressa a S em tempo $\tau(\rho_0, 0) = 2\pi$. Seja $P : S \rightarrow S$ a transformação de retorno (transformação de Poincaré) e seja $(\rho_1, 0) = P(\rho_0, 0)$. Há três possibilidades:

- Se $\rho_0 = 1$ então $(\rho_0, 0)$ é ponto fixo de P , ou seja, $\rho_1 = \rho_0$.
- Se $\rho_0 < 1$ então, conforme comentamos anteriormente, $\rho(t) < 1$ para todo t . Então, segue da equação diferencial (5.17) que $t \mapsto \rho(t)$ é crescente:

$$\rho'(t) = \epsilon \rho(t)(1 - \rho(t)^2) > 0 \text{ para todo } t,$$

em particular, $\rho_1 > \rho_0$ neste caso.

- Analogamente, se $\rho_0 > 1$ então $\rho(t) > 1$ para todo t e, conseqüentemente, $t \mapsto \rho(t)$ é decrescente. Em particular, $\rho_1 < \rho_0$ neste caso.

A Figura 5.5 ilustra este comportamento da transformação de Poincaré P .

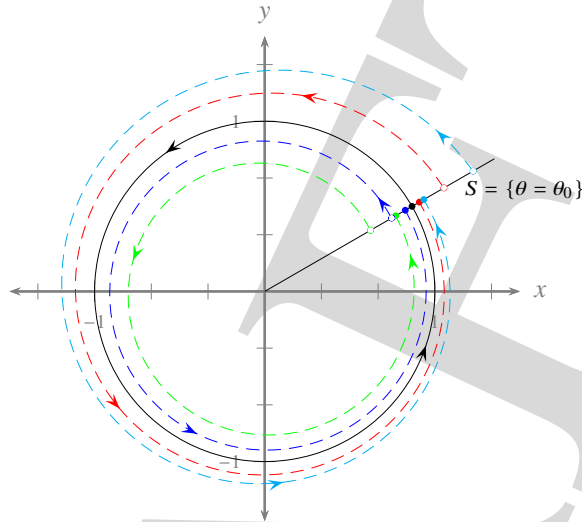


Figura 5.5: Transformação de Poincaré de órbita periódica para o sistema (5.16).

Estas propriedades implicam (veja o Exercício 5.6) que

$$\lim_n P^n(\rho_0, 0) = (1, 0) \text{ para todo } (\rho_0, 0) \in S.$$

Conseqüentemente (Proposição 5.12), a trajetória de qualquer ponto de S converge para a trajetória periódica quando $t \rightarrow +\infty$. Na verdade, o mesmo vale para *todas* as trajetórias, uma vez que toda a trajetória intersecta S .

5.4 Conjugação e equivalência de fluxos

Nesta seção vamos discutir o *problema do isomorfismo* para fluxos. Para isso, começaremos por introduzir a noção de conjugação. A motivação vem do enunciado do Teorema do Fluxo Tubular: diremos que dois fluxos são *conjugados* se existe um homeomorfismo do domínio de um no domínio do outro que envia trajetórias em trajetórias, preservando o tempo. Mais precisamente:

Definição 5.14. Sejam $(f^t)_t$ e $(g^t)_t$ os fluxos de duas equações diferenciais autônomas

$$x' = F(x), \quad F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{e} \quad y' = G(y), \quad G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Dizemos que $(f^t)_t$ e $(g^t)_t$ são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $f^t(x)$ está definida se e somente se $g^t(h(x))$ está definida e, então, vale

$$h(f^t(x)) = g^t(h(x)).$$

Confira a Figura 5.6. A aplicação h é chamada *conjugação topológica* entre os dois fluxos. Se h é um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$, dizemos que os fluxos são C^k -conjugados.

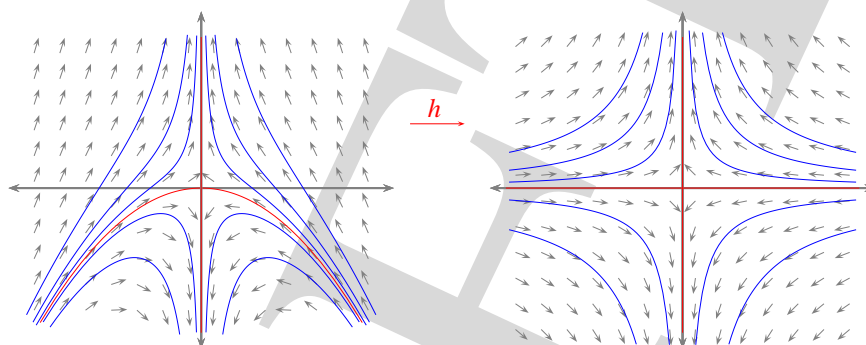


Figura 5.6: Uma conjugação envia trajetórias em trajetórias, preservando o tempo.

A esta altura podemos reformular o Teorema do Fluxo Tubular da seguinte forma: se o campo de vetores F é de classe C^k então o fluxo da equação (5.1) na vizinhança de qualquer ponto regular é C^k -conjugado a um fluxo da forma

$$g^t(s, \xi_2, \dots, \xi_d) \mapsto (s + t, \xi_2, \dots, \xi_d).$$

Agora, é fácil ver (Exercício 5.8) que a relação de conjugação é transitiva. Portanto, este enunciado significa que *na vizinhança de qualquer ponto regular, todos os fluxos são o mesmo, a menos de conjugação*.

Observação 5.15. Seja $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ uma conjugação entre dois fluxos quaisquer $(f^t)_t$ e $(g^t)_t$. Então:

- Se $x \in \mathcal{U}$ é ponto estacionário de $(f^t)_t$, então $h(x)$ é ponto estacionário de $(g^t)_t$:

$$g^t(h(x)) = h(f^t(x)) = h(x) \text{ para todo } t.$$

- Se $x \in \mathcal{U}$ é ponto periódico de $(f^t)_t$, com período T então $h(x)$ é ponto periódico de $(g^t)_t$ com o mesmo período:

$$g^T(h(x)) = h(f^T(x)) = h(x).$$

- Se $f^t(x)$ converge para p quando $t \rightarrow +\infty$ (recorde o Corolário 5.4) então $g^t(h(x))$ converge para $h(p)$ quando $t \rightarrow +\infty$: por continuidade,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g^t(h(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(f^t(x)) = h(\lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x)) = h(p).$$

Também vale um resultado análogo para $t \rightarrow -\infty$.

No entanto, a noção de conjugação não é inteiramente satisfatória, porque ela distingue entre fluxos cujo comportamento pode, de fato, ser considerado essencialmente o mesmo. Vamos ilustrar este fato por meio da seguinte construção, chamada *reparametrização*.

Exemplo 5.16. Fixe $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ e, para cada $c > 0$, considere a equação diferencial

$$x' = cF(x). \quad (5.18)$$

Observe que se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é solução de (5.1) com condição inicial $\gamma(0) = x$, então a função β definida por $\beta(t) = \gamma(ct)$ é solução de (5.18), ou seja,

$$\beta'(t) = c\gamma'(ct) = cF(\gamma(ct)) = cF(\beta(t)) \text{ para todo } t.$$

Represente por $(f_c^t)_t$ o fluxo de (5.18). A observação anterior significa que

$$f_c^t(x) = f^{ct}(x) \text{ para todo } (x, t). \quad (5.19)$$

Resumindo, os fluxos das equações (5.1) e (5.18) têm exatamente as mesmas trajetórias, a menos de reparametrização linear do tempo.

No entanto, em geral, os dois fluxos não são conjugados. Por exemplo, considere o caso do campo de vetores

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (-y, x).$$

A origem é um ponto estacionário e a trajetória de qualquer outro ponto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ está dada por

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t \quad \text{e} \quad y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Note que todas estas trajetórias são periódicas, com período 2π . Por um lado, de acordo com a Observação 5.15, se existisse uma conjugação h entre $(f^t)_t$ e $(f_c^t)_t$ então a imagem $h(x_0, y_0)$ teria que ser um ponto periódico para $(f_c^t)_t$ com o mesmo período 2π . Por outro lado, segue de (5.19) que todos os pontos $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ são periódicos para $(f_c^t)_t$, mas com período $2\pi/c$. Portanto, $(f^t)_t$ não pode ser conjugado a $(f_c^t)_t$ para nenhum $c \neq 1$.

Portanto, necessitamos de uma definição mais flexível do que significa dois fluxos serem essencialmente o mesmo que, em particular, não seja vulnerável a reparametrizações do tempo: diremos que dois fluxos são *equivalentes* se existe um homeomorfismo do domínio de um no domínio do outro que envia trajetórias do primeiro em trajetórias do segundo, preservando o *sentido* do tempo. Mais precisamente:

Definição 5.17. Nas condições da Definição 5.14, dizemos que os fluxos $(f^t)_t$ e $(g^t)_t$ são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ e, para cada $x \in \mathcal{U}$, existe um homeomorfismo τ entre o domínio I_x^f de $t \mapsto f^t(x)$ e o domínio $I_{h(x)}^g$ de $t \mapsto g^t(h(x))$, preservando a ordem e tal que

$$h(f^t(x)) = g^{\tau(t)}(h(x)) \text{ para todo } t \in I_x^f.$$

A aplicação h é chamada *equivalência topológica* entre os dois fluxos. Se h é um difeomorfismo de classe C^k e τ é de classe C^k , $k \geq 1$, dizemos que os fluxos são *C^k -equivalentes*.

No Exercício 5.9 convidamos o leitor a verificar que a Observação 5.15 permanece válida quando substituímos conjugação por equivalência, exceto pelo fato de que, em geral, equivalências não preservam os períodos de órbitas periódicas.

5.5 Teorema de Recorrência de Poincaré

Seja $f^t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}$, um fluxo completo num aberto \mathcal{U} de \mathbb{R}^d . Nesta seção vamos supor que o fluxo preserva a medida de volume de \mathcal{U} , ou seja:

$$\text{vol}(f^t(X)) = \text{vol}(X) \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e todo conjunto mensurável } X \subset \mathcal{U}. \quad (5.20)$$

O significado desta condição está ilustrado na Figura 5.7: embora as *formas* de um domínio $X \subset \mathcal{U}$ e da sua imagem $f^t(X)$ possam ser muitos diferentes, os seus *volumes* são sempre iguais. Veremos mais tarde que a propriedade (5.20) vale, por exemplo, sempre que $(f^t)_t$ é o fluxo da equação diferencial $x' = F(x)$ associada a um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ com divergente identicamente nulo (confira a Observação 7.7). O nosso objetivo aqui é mostrar que a propriedade (5.20), por si só, tem importantes implicações quanto ao comportamento das trajetórias do fluxo.

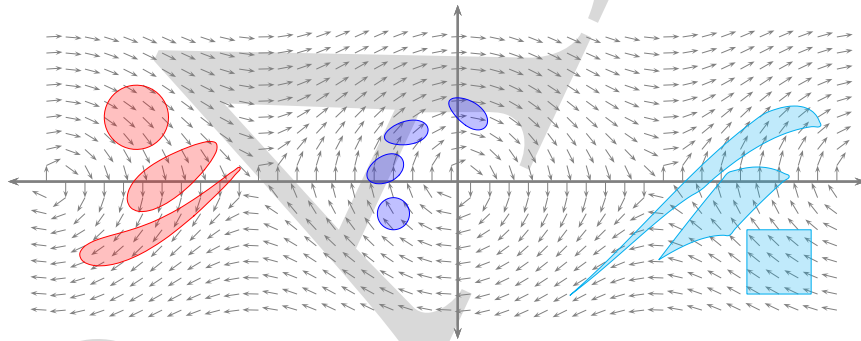


Figura 5.7: Fluxo que preserva a medida de volume.

Dizemos que um ponto $x \in \mathcal{U}$ é *recorrente* (no futuro) se a sua trajetória se acumula no próprio ponto x quando o tempo vai para infinito ou, mais precisamente, se existe uma sequência $(t_n)_n \rightarrow +\infty$ tal que $(f^{t_n}(x))_n \rightarrow x$.

Observação 5.18. Todo ponto periódico é recorrente: se $f^T(p) = p$ então é claro que a sequência $f^{nT}(p) = p$ converge para p quando $n \rightarrow \infty$. O mesmo argumento se aplica aos pontos estacionários. Em dimensão $d = 2$ estes são os únicos exemplos de pontos recorrentes (Exercício 5.19). Em dimensões maiores que 2 existem campos de vetores com pontos recorrentes não periódicos (Exercício 5.21).

Começamos por apresentar a versão do Teorema de Recorrência de Poincaré para domínios com medida de volume finita:

Teorema 5.19 (Recorrência de Poincaré). *Suponha que $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ tem medida de volume finita. Seja $f^t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}$, um fluxo completo que preserva a medida de volume*

de \mathcal{U} . Então o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{U}$ que não são recorrentes tem medida de volume zero.

Demonstração. O ingrediente principal é o seguinte lema:

Lema 5.20. *Suponha que \mathcal{U} tem medida de volume finita. Dado qualquer conjunto mensurável $E \subset \mathcal{U}$, represente por $\mathcal{S}(E)$ o conjunto dos pontos $x \in E$ cuja trajetória sai de E , ou seja, tais que existe $T > 0$ tal que $f^t(x) \notin E$ para todo $t \geq T$. Então, $\mathcal{S}(E)$ tem medida de volume zero.*

Demonstração. Por definição, $\mathcal{S}(E) = \cup_{T>0} \mathcal{S}_T(E)$, onde $\mathcal{S}_T(E)$ designa o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que $f^t(x) \notin E$ para todo $t \geq T$. É claro que a família $T \mapsto \mathcal{S}_T(E)$ é não decrescente e, portanto,

$$\text{vol}(\mathcal{S}(E)) = \sup\{\text{vol}(\mathcal{S}_T(E)) : T > 0\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \text{vol}(\mathcal{S}_T(E)).$$

Logo, basta provar que $\text{vol}(\mathcal{S}_T(E))$ é zero para todo $T > 0$. Para isso, considere as imagens $f^{jT}(\mathcal{S}_T(E))$, com $j \geq 1$. Afirmamos que estas imagens são disjuntas duas-a-duas. De fato, suponha que existissem $i > j$ e $x, y \in \mathcal{S}_T(E)$ tais que $f^{iT}(x) = f^{jT}(y)$. Isto implicaria que $f^{(i-j)T}(x) = y \in E$, o que estaria em contradição com a definição de $\mathcal{S}_T(E)$. Esta contradição prova a nossa afirmação. Então, usando a hipótese de que o fluxo é completo e preserva a medida de volume,

$$\text{vol}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{jT}(\mathcal{S}_T(E))\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(f^{jT}(\mathcal{S}_T(E))) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(\mathcal{S}_T(E)).$$

Por um lado, a expressão do lado esquerdo é menor ou igual que $\text{vol}(\mathcal{U})$ e, portanto, é finita. Por outro lado, a expressão do lado direito é uma soma infinita de parcelas todas iguais. Então as parcelas precisam ser nulas, ou seja, $\text{vol}(\mathcal{S}_T(E))$ precisa ser zero, tal como queríamos provar. \square

A partir deste lema, é fácil obter a conclusão do Teorema 5.19. Para isso, seja Z o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{U}$ que não são recorrentes. Por definição, se $x \in Z$ então existe uma vizinhança V de x e existe $T > 0$ tal que $f^t(x) \notin V$ para todo $t \geq T$. Em outras palavras, $x \in \mathcal{S}(V)$. Represente por \mathcal{B} a família das bolas $B_r(q) \subset \mathcal{U}$ com raio $r > 0$ racional e cujo centro q é um ponto com coordenadas racionais. Claro que existe alguma bola $B \in \mathcal{B}$ que contém x e está contida em V . Então $x \in \mathcal{S}(B)$. Portanto, mostramos que

$$Z \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{S}(B).$$

Então, notando que a família \mathcal{B} é enumerável, o Lema 5.20 dá que

$$\text{vol}(Z) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} \text{vol}(\mathcal{S}(B)) = 0,$$

isto implica que $\text{vol}(Z) = 0$, tal como queríamos provar. \square

É fácil ver que a conclusão do Teorema 5.19 é falsa, em geral, quando o volume de \mathcal{U} é infinito. Por exemplo, o fluxo $f^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, definido por $f^t(x) = x + t$ preserva a medida de volume (comprimento) em $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ e, no entanto, não tem nenhum ponto recorrente. Neste exemplo, todas trajetórias vão para infinito quando $t \rightarrow +\infty$. Falando informalmente, o resultado que apresentamos a seguir mostra que essa é a única coisa que pode acontecer:

Teorema 5.21 (Recorrência de Poincaré). *Seja $f^t : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}$, um fluxo completo que preserva a medida de volume de \mathcal{U} . Então, existe $Z \subset \mathcal{U}$ com medida de volume zero tal que, para todo $x \in \mathcal{U} \setminus Z$,*

- ou x é recorrente
- ou a trajetória de x vai para $\partial\mathcal{U}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Lembre que dizemos que a trajetória de um ponto $x \in \mathcal{U}$ vai para $\partial\mathcal{U}$ quando $t \rightarrow +\infty$ se, dado qualquer conjunto compacto $K \subset \mathcal{U}$, existe $T_K > 0$ tal que $f^t(x) \notin K$ para todo $t \geq T_K$. Quando $\mathcal{U} = \mathbb{R}^d$, isto é o mesmo que dizer que a norma $\|f^t(x)\|$ vai para infinito quando $t \rightarrow +\infty$.

Demonstração. No lugar do Lema 5.20 usaremos o seguinte resultado, onde a principal novidade é que E não precisa ter volume finito:

Lema 5.22. *Dado qualquer conjunto mensurável $E \subset \mathcal{U}$ e qualquer conjunto compacto $K \subset \mathcal{U}$, represente por $\mathcal{S}(E, K)$ o conjunto dos pontos $x \in E$ cuja trajetória*

- (i) sai de E : existe $T > 0$ tal que $f^t(x) \notin E$ para todo $t \geq T$,
- (ii) mas não sai de K : existem valores de $t > 0$ arbitrariamente grandes tais que $f^t(x) \in K$.

Então $\mathcal{S}(E, K)$ tem medida de volume zero.

Demonstração. Para cada $T > 0$, represente por $\mathcal{S}_T(E, K)$ o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{S}(E, K)$ tais que $f^t(x) \notin E$ para todo $t \geq T$. A família $T \mapsto \mathcal{S}_T(E, K)$ é não decrescente e a sua união coincide com $\mathcal{S}(E, K)$. Logo,

$$\text{vol}(\mathcal{S}(E, K)) = \sup\{\text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K)) : T > 0\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K))$$

e, portanto, basta mostrar que $\text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K)) = 0$ para todo $T > 0$. Afirmamos que os conjuntos $f^{jT}(\mathcal{S}_T(E, K))$, $j \in \mathbb{N}$ são disjuntos dois-a-dois. De fato, suponha que existissem $x, y \in \mathcal{S}_T(E, K)$ e $i > j$ tais que $f^{iT}(x) = f^{jT}(y)$. Então $f^{(i-j)T}(x) = y \in E$, o que contradiria a definição de $\mathcal{S}_T(E, K)$. Isto prova a nossa afirmação.

Agora defina $K_T = \{f^t(x) : x \in K \text{ e } t \in [0, T]\}$. Observe que, por definição, K_T é a imagem do compacto $[0, T] \times K$ pela aplicação contínua $(t, x) \mapsto f^t(x)$. Logo, K_T é compacto e, em particular, tem medida de volume finita. Para cada $j \geq 1$, represente por $\mathcal{S}_{T,j}(E, K)$ o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{S}_T(E, K)$ tais que $f^t(x) \in K$ para algum $t \in ((j-1)T, jT]$. Pela definição de K_T , segue que $f^{jT}(x) \in K_T$ para todo $x \in \mathcal{S}_{T,j}(E, K)$. Em outras palavras, $f^{jT}(\mathcal{S}_{T,j}(E, K)) \subset K_T$ para todo j . Como

$\mathcal{S}_{T,j}(E, K) \subset \mathcal{S}_T(E, K)$, temos que os conjuntos $f^{jT}(\mathcal{S}_{T,j}(E, K))$ são disjuntos dois-a-dois. Usando também o fato de que o fluxo preserva a medida de volume, obtemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_T) &\geq \text{vol}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{jT}(\mathcal{S}_{T,j}(E, K))\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(f^{jT}(\mathcal{S}_{T,j}(E, K))) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(\mathcal{S}_{T,j}(E, K)). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Em seguida, observe que, pela condição (ii) na definição, todo ponto $x \in \mathcal{S}_T(E, K)$ pertence a $\mathcal{S}_{T,j}(E, K)$ para infinitos valores de $j \in \mathbb{N}$. Isto pode ser reformulado da seguinte forma. Represente por χ_j a função característica de cada conjunto $\mathcal{S}_{T,j}(E, K)$. Então, a sequência

$$\sigma_n(x) = \sum_{j=1}^n \chi_j(x)$$

converge para infinito quando $n \rightarrow \infty$, qualquer que seja $x \in \mathcal{S}_T(E, K)$. Note também que esta sequência é não decrescente. Então, dado qualquer $k \geq 1$, os conjuntos

$$L_{k,n} = \{x \in \mathcal{S}_T(E, K) : \sigma_n(x) \geq k\}, \quad n \geq 1,$$

formam uma sequência não decrescente cuja união é $\mathcal{S}_T(E, K)$. Logo, sempre podemos encontrar $n \geq 1$ tal que a medida de volume de $L_{k,n}$ esteja tão próxima de $\text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K))$ quanto quisermos. Em particular, podemos encontrar $n \geq 1$ tal que $\text{vol}(L_{k,n}) \geq \text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K))/2$. Então,

$$\sum_{j=1}^n \text{vol}(\mathcal{S}_{T,j}(E, K)) = \int_{\mathcal{U}} \sum_{j=1}^n \chi_j(x) dx \geq k \text{vol}(L_{k,n}) \geq \frac{k}{2} \text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K)). \quad (5.22)$$

Combinando as relações (5.21) e (5.22), obtemos que

$$\frac{k}{2} \text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K)) \leq \text{vol}(K_T).$$

Como $k \geq 1$ é arbitrário e a medida de volume de K_T é finita, isto implica que $\text{vol}(\mathcal{S}_T(E, K)) = 0$. \square

Para deduzir a conclusão do Teorema 5.21, seja Z o conjunto dos pontos $x \in \mathcal{U}$ que não são recorrentes e cuja trajetória não vai para o bordo de \mathcal{U} . Por definição, se $x \in Z$ então ele admite uma vizinhança V e existe um compacto $K \subset \mathcal{U}$ tais que a trajetória de x sai de V mas não sai de K . Em outras palavras, $x \in \mathcal{S}(V, K)$. Represente por \mathcal{B} a família das bolas $B_r(q) \subset \mathcal{U}$ com raio r racional e cujo centro q é um ponto com coordenadas racionais. Para cada $m \geq 1$, defina

$$K_m = \{x \in \mathcal{U} : d(x, \mathcal{U}^c) \geq \frac{1}{m} \text{ e } \|x\| \leq m\},$$

sendo \mathcal{U}^c o complementar de \mathcal{U} em \mathbb{R}^d .

Note que K_m é um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^d e, portanto, é compacto. Sempre existe alguma bola $B \in \mathcal{B}$ que contém x e está contida em V . Além disso, $K \subset K_m$ para qualquer m é suficientemente grande. Então $x \in S(B, K_m)$. Desta forma, mostramos que

$$Z \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \bigcup_{m=1}^{\infty} S(B, K_m).$$

Então, notando que esta união é sobre um conjunto enumerável, o Lema 5.22 dá que

$$\text{vol}(Z) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{m=1}^{\infty} \text{vol}(S(B, K_m)) = 0,$$

isto implica que $\text{vol}(Z) = 0$, tal como queríamos provar. \square

5.6 Experimento: circuitos elétricos

Consideremos um circuito elétrico simples com uma resistência, um capacitor e um indutor, tal como descrito na Figura 5.8. A lei de evolução do circuito pode ser deduzida das leis da Física da seguinte forma.

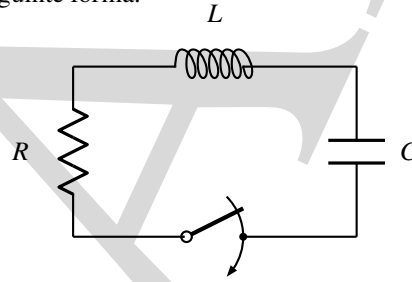


Figura 5.8: Um circuito elétrico com uma resistência (R), um capacitor (C) e um indutor (L).

Sejam I_R , I_C e I_L as intensidades de corrente e V_R , V_C e V_L as diferenças de tensão nos três elementos. Pelas leis de Kirchhoff,

$$I_R = I_C = I_L \quad \text{e} \quad V_R + V_C + V_L = 0.$$

Também temos que $I_C = C V'_C$ (lei de Coulomb), onde C é a capacitância do capacitor, e $V_L = L I'_L$ (lei de Faraday), onde L é a indutância do indutor. Escolha as unidades físicas de tal forma que $C = 1$ e $L = 1$ e suponha que a resistência satisfaz uma lei de Ohm não linear $V_R = G(I_R)$. Escreva $x = I_R = I_C = I_L$. Então,

$$x'' = I'_L = V'_L = -V'_C - V'_R = -I_C - G'(I_R)I'_R = -x - g(x)x' \quad (5.23)$$

onde g representa a derivada de G . Equações desta forma são chamadas *equações de Liénard*.

Mais tarde, na Seção 11.2.3, analisaremos mais de perto o caso particular em que a função g tem a forma $g(x) = \mu(x^2 - 1)$ com $\mu > 0$, que é chamado *equação de van*

der Pol. De momento, o nosso objetivo é investigar numericamente o comportamento de soluções de equações do tipo (5.24). Para isso, começemos por escrever (5.23) na forma de uma equação de ordem 1 e dimensão 2:

$$(x_1, x_2)' = F(x_1, x_2) \quad \text{com} \quad F(x_1, x_2) = (x_2, -x_1 - g(x_1)x_2). \quad (5.24)$$

Para resolver esta equação numericamente, propomos ao leitor utilizar o *método de Runge–Kutta–Fehlberg RKF45* que é, efetivamente, o mais utilizado no cálculo numérico científico de equações diferenciais. Trata-se de um método da família Runge–Kutta mas com novidade de que *o espaçamento h é variável*. De fato, em cada iteração são calculados não um mas dois valores para a solução aproximada, usando métodos de Runge–Kutta de ordem 4 e de ordem 5. A diferença entre esses dois valores dá uma estimativa do erro e é usada para calcular o espaçamento na próxima iteração.

Mais precisamente, o quadro de Butcher do método RKF45 é

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55

Observe que ele apresenta duas linhas na parte inferior: uma corresponde ao método de ordem 4 e a outra ao método de ordem 5 mencionados anteriormente, conforme vamos explicar. De acordo com este quadro de Butcher, os iterados são calculados por meio das relações:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, x_k), \\ k_2 &= hf\left(t_k + \frac{1}{4}h, x_k + \frac{1}{4}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t_k + \frac{3}{8}h, x_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\ k_4 &= hf\left(t_k + \frac{12}{13}h, x_k + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\ k_5 &= hf\left(t_k + h, x_k + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\ k_6 &= hf\left(t_k + \frac{1}{2}h, x_k - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \\ y_{k+1} &= x_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6. \end{aligned}$$

Este último valor, obtido por meio de um método de ordem 5, é usado apenas para aferir o erro

$$E \approx |x_{k+1} - y_{k+1}|.$$

Represente por E_{\max} o erro máximo tolerado. Há duas possibilidades:

- 1) se $E > E_{\max}/2$, substituímos o valor de h pelo espaçamento menor

$$h' = \left(\frac{E_{\max}}{2E} \right)^{1/4} h \quad (5.25)$$

e o utilizamos, juntamente com os valores conhecidos (t_k, x_k) , para buscar uma solução aproximada em $t'_{k+1} = t_k + h'$;

- 2) se $E \leq E_{\max}/2$, então aceitamos a aproximação (t_{k+1}, x_{k+1}) , aumentamos o valor do espaçamento por meio de (5.25) e utilizamos estes valores para aproximar a solução no próximo passo.

Desta forma, os sucessivos espaçamentos são adaptados ao erro cometido: se o erro é pequeno com relação a E_{\max} (mais precisamente, se $E < E_{\max}/2$) então o espaçamento na iteração seguinte será maior; caso contrário, ele será menor. Desta forma, o método RKF45 costuma fornecer melhores resultados para um custo computacional comparável ao de outros métodos. Atente para o fato de que precisamos estabelecer valores mínimos e máximos para o espaçamento h , para evitar tanto ciclos intermináveis (em equações “rígidas”, que peçam valores de h muito pequenos) quanto aproximações grosseiras (em equações muito “suaves”, que permitam espaçamentos demasiado grandes).

Objetivos:

1. Escreva, em código do MATLAB/Octave ou outro ambiente computacional, uma função correspondente ao método de integração numérica RKF45.
2. Use o método RKF45 para encontrar as soluções da equação de Liénard com $g(x) = x^2 - 1$ para diferentes escolhas das condições iniciais. Teste diferentes valores para o espaçamento inicial h . Represente os resultados graficamente (confira a Figura 5.9). Interprete esses resultados.

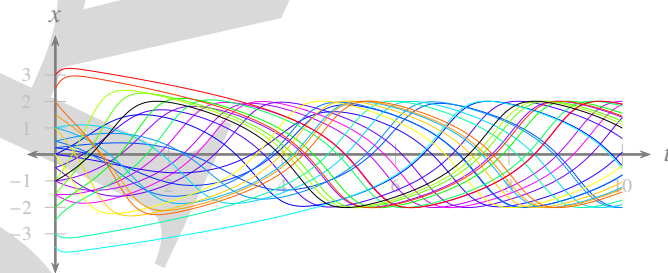


Figura 5.9: Soluções da equação de Liénard (5.23) com $g(x) = x^2 - 1$ para diferentes condições iniciais.

3. Consegue verificar numericamente que a equação admite um *ciclo limite*, ou seja, uma solução fechada que “atrai” todas as soluções próximas? Confira a Figura 5.10. Este comportamento será explicado analiticamente na Seção 11.2.3.

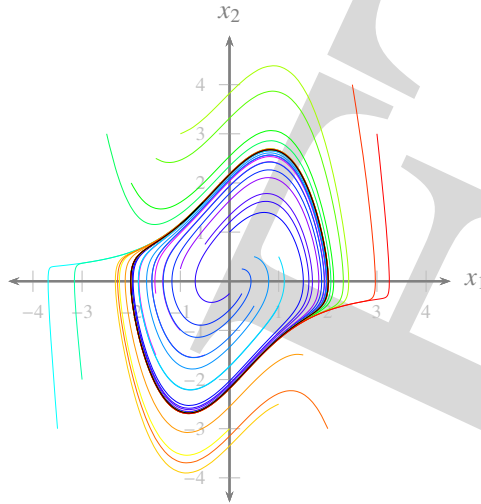


Figura 5.10: Representação planar das soluções da equação de Liénard na Figura 5.9. Note a presença de um ciclo limite, atraindo todas as soluções com condições iniciais próximas.

4. Analise numericamente o comportamento das soluções da equação de Liénard com $g(x) = \mu(x^2 - 1)$ para diferentes valores do parâmetro μ . Confira a Figura 5.11. Consegue entender o que acontece com o ciclo limite quando o parâmetro varia?

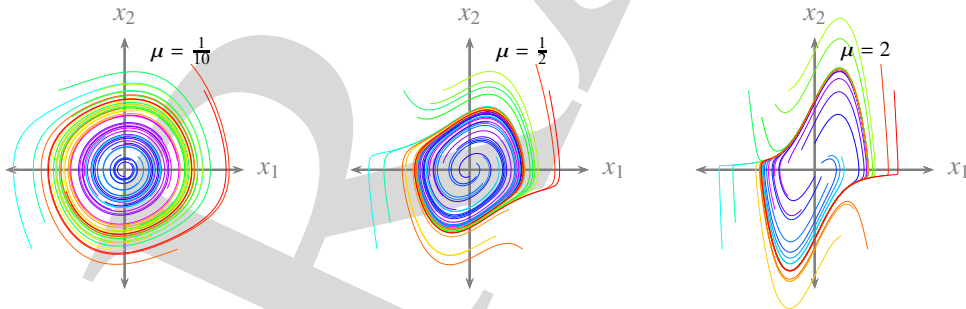


Figura 5.11: Soluções da equação de Liénard com $g(x) = \mu(x^2 - 1)$ para diferentes valores do parâmetro μ .

5. Compare os resultados quando o método RKF45 é substituído pelo método de Runge-Kutta de ordem 4, com diferentes valores do espaçamento h . Quais as vantagens de cada método e em quais condições eles podem ser melhor empregados?

5.7 Exercícios

Exercício 5.1. Seja $x \in \mathcal{U}$ um ponto cuja trajetória para (5.1) não é injetiva. Mostre que a trajetória está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\{\tau \in \mathbb{R} : f^\tau(x) = x\}$ é um subgrupo fechado da reta. Conclua que ou x é um ponto estacionário ou existe $T > 0$ tal que $f^T(p) = p$ e a restrição da trajetória a $[0, T)$ é injetiva. Por vezes, chamamos T de período mínimo de x .

Exercício 5.2. Seja $(f^t)_t$ o fluxo da equação (5.1). Mostre que para todo $x \in \mathcal{U}$, todo intervalo compacto $J \subset I_x$ e todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f^t(x) - f^t(y)\| \leq \epsilon \text{ para todo } y \in B_\delta(x) \text{ e todo } t \in J.$$

Exercício 5.3. Prove o seguinte enunciado, conhecido como *Teorema do Fluxo Tubular Longo*. Seja $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular e $\tau > 0$ um ponto no domínio I_x de definição da trajetória γ_x da equação (5.1) tal que a restrição de γ_x ao intervalo $[0, \tau]$ é injetiva. Então existem $\epsilon > 0$ e um difeomorfismo $H : (-\epsilon, \tau + \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon)^{d-1} \rightarrow W$ de classe C^k sobre uma vizinhança W de $\gamma_x([0, \tau])$ tal que $H(0) = x_0$ e a função

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \tau + \epsilon) &\rightarrow \mathcal{U} \\ t &\mapsto H(t, \xi_2, \dots, \xi_d) \end{aligned}$$

é solução da equação (5.1) para todo $(\xi_2, \dots, \xi_d) \in (-\epsilon, \epsilon)^{d-1}$. Deduza o Teorema 5.11 deste resultado.

Exercício 5.4. Considere uma aplicação $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$. Mostre que existe um campo de vetores $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que f é a aplicação tempo-1 do fluxo de F se e somente se f é um difeomorfismo de classe C^2 .

Exercício 5.5 (C). Use o método RKF45 para calcular numericamente as soluções das seguintes equações diferenciais no domínio $(t_0 - 10, t_0 + 10)$:

1. $x' - tx = 0$ com condição inicial $(t_0, x_0) = (1, 1)$.
2. $x' - e^{2t} + 1 = 0$ com condição inicial $(t_0, x_0) = (1, 0)$.
3. $tx' - 1 = 0$ com condição inicial $(t_0, x_0) = (1, 1)$.
4. $x' - e^{2t-x} = 0$ com condição inicial $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Compare com os resultados dos Exercícios 1.2, 1.30, 2.11 3.25, 4.4 e 4.5.

Exercício 5.6. Seja $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ contínua crescente tal que

$$\begin{cases} f(x) > x \text{ se } x < 1, \\ f(1) = 1, \\ f(x) < x \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

Mostre que $f^n(x) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, qualquer que seja $x \in (0, \infty)$.

Exercício 5.7 (C). Considere a equação diferencial do pêndulo harmônico (1.5) com $g = 1$ e $l = 1$, ou seja, $x'' = -\sin x$. A representação do respectivo campo de vetores na Figura 1.5 sugere que existem soluções periódicas (fechadas) e também soluções em que $|x(t)| \rightarrow \infty$ quando $|t| \rightarrow \infty$. Investigue a equação numericamente, usando o método RKF45, para encontrar exemplos dos dois tipos de comportamento. Consegue identificar uma trajetória separando os dois tipos? Compare com as conclusões do Exercício 3.9.

Exercício 5.8. Mostre que as relações dadas pelas Definições 5.14 e 5.17 são relações de equivalência, ou seja, reflexivas, simétricas e transitivas.

Exercício 5.9. Mostre que as afirmações na Observação 5.15 permanecem válidas se substituirmos conjugação por equivalência, exceto que os períodos de órbitas periódicas não são preservados por equivalências, em geral.

Exercício 5.10 (C). Use o método RKF45 para estudar a equação diferencial (5.16) no Exemplo 5.13. Verifique numericamente que o círculo unitário $\{x^2 + y^2 = 1\}$ é um ciclo limite da equação para $\epsilon = 1$.

Exercício 5.11. Considere os fluxos dos seguintes pares de equações diferenciais:

1. $x' = -x$ e $y' = -2y$;
2. $x' = -x$ e $z' = -z^3$.

Para cada par, discuta se existe ou não um homeomorfismo h definido numa vizinhança da origem que conjuga os dois fluxos e justifique, no caso afirmativo, que h não pode ser um difeomorfismo.

Exercício 5.12. Sejam $p \in \mathcal{U}$ um ponto periódico e $P : S' \rightarrow S$ a transformação de Poincaré associada a uma seção transversal S em p . Seja $z \in S$ tal que $P^n(z)$ está definido para todo $n \geq 0$ e converge exponencialmente para p : existem $C > 0$ e $\lambda < 1$ tais que

$$\|P^n(z) - p\| \leq C\lambda^n \text{ para todo } n \geq 1.$$

Mostre que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que a trajetória de z é assintótica à trajetória de $f^s(p)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f^t(z) - f^t(f^s(p))\| = 0.$$

[Dica: Use o fato de que a função tempo de retorno $\tau : S' \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana.]

Exercício 5.13. Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores C^1 e seja $p \in \mathcal{U}$ tal que toda vizinhança de p contém uma trajetória periódica de F . Conclua que p é um ponto estacionário.

Exercício 5.14. Considere a equação diferencial autônoma em $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ dada por

$$x' = \frac{x^2}{1 + x^2 y^2}, \quad y' = 0.$$

Justifique que o respectivo fluxo é completo. Mostre que para todo $T > 0$ existem abertos limitados $X \subset \mathcal{U}$ tais que $X_T = \{f^t(x) : x \in X \text{ e } t \in [0, T]\}$ tem medida de volume infinita.

Exercício 5.15 (C). Use o método RKF45 para estudar numericamente a equação diferencial no Exercício 5.14. Em particular, calcule as soluções correspondentes às condições iniciais $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $(x_0, y_0) = (0, 2)$ e $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Exercício 5.16. Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 num aberto \mathcal{U} do plano. O transporte (em inglês: flux) de F através de uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^1 por pedaços é a integral

$$\text{flux}(F, \gamma) = \int_0^1 \langle F(\gamma(s)), N(s) \rangle ds$$

onde N designa o campo de vetores unitário ao longo da curva γ tal que $\{\gamma'(s), N(s)\}$ é um base ortogonal positivamente orientada de \mathbb{R}^2 .

Justifique que o fluxo de F preserva a medida de área se e somente se $\text{flux}(F, \gamma) = 0$ para toda curva simples fechada de classe C^1 .

Exercício 5.17. Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 num aberto \mathcal{U} do plano. Seja $P : S_0 \rightarrow S_1$ uma transformação de Poincaré entre dois segmentos S_0 e S_1 de uma mesma seção transversal S ao fluxo de F (confira a Figura 5.12). Fixe uma orientação qualquer em S . Mostre que se o fluxo de F preserva a medida de área então a transformação de Poincaré preserva o transporte: $\text{flux}(F, I) = \text{flux}(F, P(I))$ para todo segmento $I \subset S_0$.

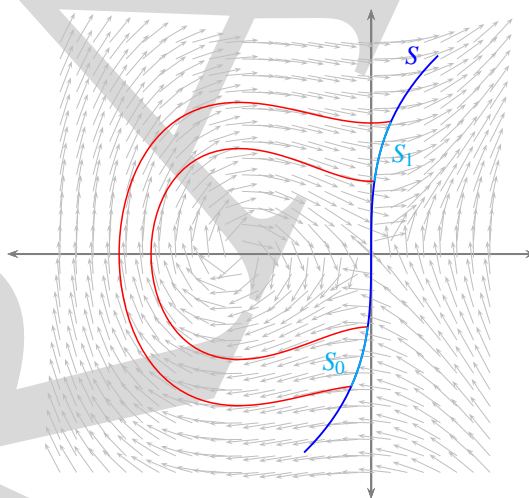


Figura 5.12: As transformações de Poincaré de fluxos conservativos preservam o transporte através de seções transversais.

Exercício 5.18 (C). Use o método RKF45 para estudar numericamente a equação de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x_1' = c_1 x_1 (1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2) \\ x_2' = c_2 x_2 (1 - a_{21} x_1 - a_{22} x_2) \end{cases}$$

para diferentes escolhas do ponto inicial $(x_{1,0}, x_{2,0})$, considerando os seguintes parâmetros:

1. $c_1 = 1, c_2 = -1, a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = 1$ e $a_{22} = 0$.
2. $c_1 = 1, c_2 = -1, a_{11} = 1/2, a_{12} = 1, a_{21} = 1$ e $a_{22} = -1/2$.
3. $c_1 = 1, c_2 = -1, a_{11} = 2, a_{12} = 1, a_{21} = 1$ e $a_{22} = -1/2$.

Compare com os resultados na Seção 1.4.

Exercício 5.19. Mostre que se $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ é um ponto recorrente para um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 então p ou é um ponto estacionário ou é um ponto regular periódico.

Exercício 5.20 (C). Considere o aberto $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0 \text{ e } z > 0\}$ com as coordenadas “cilíndricas” (ρ, θ, ζ) definidas por

$$x = e^\rho \cos \theta, \quad y = e^\rho \sin \theta \quad \text{e} \quad z = e^\zeta.$$

Considere a equação diferencial em \mathcal{U} definida nessas coordenadas por

$$\rho' = \zeta, \quad \theta' = c \quad \text{e} \quad \zeta' = -\rho, \tag{5.26}$$

com $c \notin \mathbb{Q}$. Use o método RKF45 para identificar a existência de pontos recorrentes regulares não periódicos.

Exercício 5.21. Mostre rigorosamente que o fluxo no Exercício 5.20 realmente tem pontos recorrentes regulares não periódicos.

Exercício 5.22. Seja \mathcal{U} aberto de \mathbb{R}^n e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Mostre que a equação diferencial $x' = \text{grad} f(x)$ não tem trajetórias periódicas não estacionárias.

Exercício 5.23 (C). Use o método RKF45 para estudar numericamente as soluções da equação de Mathieu

$$x'' = -(a + b \sin t)x \tag{5.27}$$

com condição inicial $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$ para os diferentes valores dos parâmetros:

1. $a = 0,25$ e $b = 0$.
2. $a = 0,25$ e $b = 0,1$.
3. $a = 0,16$ e $b = 0,15$.

Exercício 5.24 (C). Use o método RKF45 para estudar numericamente a equação diferencial $x' = Dh(x)$ no domínio \mathcal{U} , em cada um dos seguintes casos:

1. $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\| < 1\}$ e $h(x) = \ln \|x\|^2$;
2. $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < \|x\| < 1\}$ e $h(x) = \|x\|^{-1}$.

[Dica: Use coordenadas polares.]

Exercício 5.25. Seja \mathcal{U} um aberto limitado de \mathbb{R}^d . Seja $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica, ou seja, uma função de classe C^2 que se estende continuamente ao fecho $\overline{\mathcal{U}}$ e satisfaz

$$\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 h \equiv 0 \text{ no domínio } \mathcal{U}.$$

Mostre que h não tem pontos críticos isolados em \mathcal{U} .

[Dica: Use o fato de que o campo de vetores $F(x) = Dh(x)$ preserva o volume.]

Exercício 5.26. Considere a equação diferencial não autônoma $x' - x = \sin t$. Verifique que se $t \mapsto \gamma(t)$ é solução então $t \mapsto \gamma(t \pm 2\pi)$ também são soluções. Encontre a expressão analítica da solução com condição inicial $x(0) = x_0$ e use-a para calcular a transformação $x(0) \mapsto x(2\pi)$. Represente esta transformação graficamente, analise as suas propriedades e use-as para descrever o comportamento das soluções da equação diferencial.

Exercício 5.27 (C). Reescreva $x' - x = \sin t$ como uma equação diferencial autônoma de dimensão 2 e seja $(f^t)_t$ o seu fluxo. Verifique que as retas $t = 0$ e $t = 2\pi$ são seções transversais. Escreva uma função em código do MATLAB/Octave ou outro ambiente computacional que calcule a transformação de Poincaré $P : (0, x(0)) \mapsto (2\pi, x(2\pi))$. Represente os resultados graficamente e compare com as conclusões do Exercício 5.26.

5.8 Notas

As ideias fundamentais deste capítulo são devidas a Poincaré. A noção de fluxo incorpora a sua proposta de que soluções de equações diferenciais não devem ser vistas como funções isoladas e sim como famílias de curvas interagindo entre si no espaço de fase. Este ponto de vista permite utilizar diversas ferramentas matemáticas para descrever o comportamento das soluções em relação com o espaço de fase. O Teorema de Poincaré–Bendixson, que estudaremos no Capítulo 11 é um ótimo exemplo de como a Topologia (especificamente, o Teorema da Curva Fechada de Jordan) pode ser usada desta forma. Da mesma forma, o Teorema de Recorrência de Poincaré (Teoremas 5.19 e 5.21) ilustra muito bem o uso de ideias da Teoria da Medida neste âmbito.

O Teorema de Recorrência (ou Teorema de Estabilidade, como foi chamado por Poincaré) surgiu no famoso trabalho *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* [98], com o qual Poincaré ganhou o prêmio científico instituído pelo rei Oskar II da Suécia e Noruega em 1885. O prêmio tinha como objetivo distinguir “uma descoberta importante no domínio da análise matemática superior” e Poincaré escolheu tratar do “estudo do comportamento de um sistema formado por um número qualquer de corpos que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton, incluindo o problema da estabilidade do Sistema Solar”. O júri, formado por Magnus Gösta Mittag-Leffler, Karl Wilhelm Theodor Weierstrass e Charles Hermite, escreveu no relatório final: “Este trabalho não pode ser considerado realmente como fornecedor da solução completa para a questão proposta, mas aquilo que de mais importante tem esta publicação é que ela inaugura uma nova era na história da mecânica celeste.” De fato, o artigo de Poincaré

viria a dar origem à obra em 3 volumes *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [99, 100, 103] que revolucionou definitivamente essa área da ciência.

A ideia de expressar o comportamento das soluções de equações diferenciais em termos do comportamento das trajetórias de transformações será o outro ingrediente fundamental na demonstração do Teorema de Poincaré–Bendixson, no Capítulo 11, e constitui uma das ferramentas mais úteis introduzidas por Poincaré (confira [96] ou [103, Capítulo XXVII]).

Informações sobre a equação de Liénard serão dadas nas Notas do Capítulo 11. O método RKF45 foi proposto pelo matemático alemão Erwin Fehlberg (1911–1990) num trabalho publicado em 1969 como relatório técnico da NASA.

DRAFT