

Capítulo 12

Teorema de Poincaré–Hopf

O Teorema de Poincaré–Hopf é o primeiro de uma família de resultados que revelam conexões surpreendentes entre objetos topológicos (globais) e objetos analíticos (locais) de naturezas muito distintas. A essa família pertencem, entre outros, o Teorema de Gauss–Bonnet da Geometria Diferencial, que também discutiremos aqui, os Teoremas de Riemann–Hurwitz e Riemann–Roch da Análise Complexa, e o famoso Teorema do Índice de Atiyah–Singer. Frequentemente, essas conexões podem ser interpretadas mediante ideias oriundas da Física.

O Teorema de Poincaré–Hopf relaciona a topologia da variedade ambiente M , expressa por meio da sua característica de Euler, com o comportamento dos campos de vetores em M na vizinhança dos seus pontos estacionários. De fato, suponha que F é um campo de vetores de classe C^1 cujos pontos estacionários são isolados. Veremos na Seção 12.1 que é possível associar a cada ponto estacionário p um número inteiro, chamado *índice* de F no ponto p e representado por $\text{ind}(F, p)$, que pode ser entendido como o número de voltas que o campo de vetores dá quando damos uma volta em torno do ponto estacionário.

Por exemplo, quando $M = \mathbb{R}^2$ podemos considerar uma curva simples fechada $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja imagem está contida numa pequena vizinhança do ponto estacionário e dá uma volta em torno de p no sentido anti-horário. Então, $\text{ind}(F, p)$ é o número de voltas que a curva

$$F \circ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad s \mapsto F(c(s))$$

dá em torno da origem de \mathbb{R}^2 . A definição precisa para campos de vetores em superfícies será dada na Seção 12.1 e a sua extensão para variedades quaisquer será delineada nos Exercícios 12.4 a 12.6. É importante assinalar que o índice é um objeto local: ele só depende do comportamento do campo de vetores na vizinhança do ponto estacionário.

A noção de *característica de Euler* remonta à afirmação de Euler de que os números V de vértices, A de arestas e F de faces de qualquer poliedro satisfazem a igualdade

$$V - A + F = 2.$$

Na verdade, Euler considerava apenas poliedros convexos. Em geral, dado um poliedro P , não necessariamente convexo, o número $\chi(P) = V - A + F$ é chamado *característica*

de Euler de P . Explicaremos na Seção 12.2 como esta noção pode ser estendida para superfícies compactas quaisquer. O Apêndice A.6 contém uma discussão mais geral, para poliedros e variedades de qualquer dimensão.

A característica de Euler é um invariante topológico global, ou seja, ele é preservado por homeomorfismos. Aliás, na classe das superfícies compactas orientáveis (ou não orientáveis) ela é um invariante topológico *completo*: de acordo com o Teorema da Classificação das Superfícies, duas superfícies compactas orientáveis (ou não orientáveis) são homeomorfas (e difeomorfas) se e somente elas têm a mesma característica de Euler.

O Teorema de Poincaré–Hopf afirma que estes dois conceitos de natureza tão diversa estão intimamente ligados:

Teorema 12.1 (Poincaré–Hopf). *Se M é uma variedade compacta sem bordo e F é um campo de vetores de classe C^1 em M com um número finito de pontos estacionários, p_1, \dots, p_N , então,*

$$\sum_{i=1}^N \text{ind}(F, p_i) = \chi(M). \quad (12.1)$$

Provaremos este teorema, nas Seções 12.3 e 12.4, apenas no caso em que M é uma superfície compacta orientável. É interessante observar que a demonstração envolverá outro conceito importante, de natureza métrica: a *curvatura de Gauss* da superfície. De fato, também veremos ao final da Seção 12.4 que as mesmas ideias provam outro resultado fundamental da Geometria Diferencial, o Teorema de Gauss–Bonnet (Teorema 12.14), segundo o qual a curvatura total de uma superfície orientável M é igual a $2\pi\chi(M)$. Em particular, uma superfície compacta com característica de Euler positiva, tal como a esfera \mathbb{S}^2 , não pode ser munida com uma métrica de curvatura não positiva em todo ponto.

Desta forma, estes resultados evidenciam relações intrigantes entre três teorias aparentemente distintas: a Topologia Geral e a Topologia Diferencial, interessadas em propriedades globais do espaço ligadas à continuidade à diferenciabilidade, respectivamente, e a Geometria Diferencial, que estuda propriedades locais oriundas da métrica na superfície.

12.1 Índice de ponto estacionário

Ao longo do capítulo chamaremos curva a qualquer aplicação contínua e diferenciável por pedaços, definida num intervalo compacto. Nesta seção vamos definir o conceito de índice de um ponto estacionário isolado, para campos de vetores em superfícies. A extensão para dimensões superiores está esboçada nos Exercícios 12.4 a 12.6.

12.1.1 Número de voltas em torno de um ponto

Por definição, o *número de voltas* de uma curva fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ em torno da origem é o número real (veja a Figura 12.1)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\theta_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt, \quad (12.2)$$

onde $d\theta$ é a 1-forma diferencial definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ por

$$d\theta_{(x,y)} = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx. \quad (12.3)$$

É fácil verificar que esta forma diferencial é fechada:

$$\begin{aligned} d(d\theta)_{(x,y)} &= \partial_x \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy - \partial_y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx \equiv 0. \end{aligned}$$

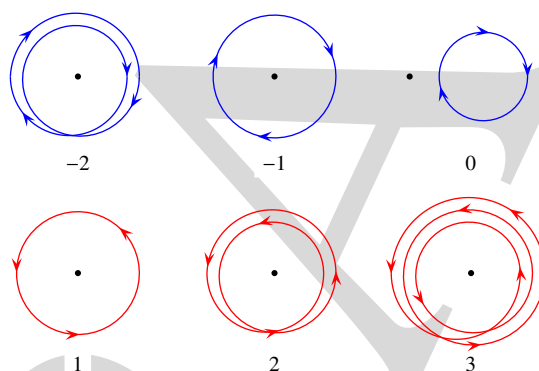


Figura 12.1: Número de voltas em torno da origem.

Para interpretarmos a definição (12.2), é bom analisar um pouco a 1-forma diferencial $d\theta$. Considere as funções “ângulo”

$$\begin{aligned} \theta_+ : \mathbb{R}^2 \setminus X_+ &\rightarrow (0, 2\pi) \text{ dada por } (x, y) = \|(x, y)\|(\cos \theta_+(z), \text{sen } \theta_+(z)) \text{ e} \\ \theta_- : \mathbb{R}^2 \setminus X_- &\rightarrow (-\pi, \pi) \text{ dada por } (x, y) = \|(x, y)\|(\cos \theta_-(z), \text{sen } \theta_-(z)), \end{aligned} \quad (12.4)$$

onde $X_+ = \{(x, 0) : x \geq 0\}$ e $X_- = \{(x, 0) : x \leq 0\}$. Note que $\tan \theta_{\pm}(x, y) = y/x$ se $x \neq 0$ e $\cot \theta_{\pm}(x, y) = x/y$ se $y \neq 0$. Derivando estas igualdades obtemos que

$$D\theta_{\pm}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x dy - y dx) = d\theta_{(x,y)} \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus X_{\pm}. \quad (12.5)$$

Em outras palavras, as funções θ_+ e θ_- são primitivas da 1-forma $d\theta$ nos respectivos domínios. Portanto, a integral $\int_{\gamma} d\theta$ corresponde à variação total do “ângulo” ao longo da curva γ . A demonstração do próximo lema explicita esta ideia.

Lema 12.2. *O número de voltas em torno da origem de qualquer curva fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é inteiro.*

Demonstração. Lembre que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é contínua, por hipótese. Como o domínio é compacto, segue que existe $\delta > 0$ tal que $\|\gamma(t)\| \geq \delta$ para todo $t \in [0, 1]$. Além disso, existe $N \geq 1$ tal que, para cada $i = 0, \dots, N-1$,

$$\gamma([i/N, (i+1)/N]) \cap X_+ = \emptyset \quad \text{ou} \quad \gamma([i/N, (i+1)/N]) \cap X_- = \emptyset. \quad (12.6)$$

Por (12.5), isto implica que a integral da 1-forma $d\theta$ sobre o segmento de curva $\gamma|_{[i/N, (i+1)/N]}$ é igual a

$$\theta_+(\gamma((i+1)/N)) - \theta_+(\gamma(i/N)) \quad \text{ou} \quad \theta_-(\gamma((i+1)/N)) - \theta_-(\gamma(i/N)),$$

respectivamente. Vamos usar estes fatos para construir uma função contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) = \|\gamma(t)\| (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) \quad \text{para todo } t \in [0, 1]. \quad (12.7)$$

Escolha qualquer $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(0) = \|\gamma(0)\| (\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$. Note que α_0 é único a menos de soma com um múltiplo inteiro de 2π . Se $\gamma([0, 1/N])$ não intersecta X_+ , tome $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_0 = \theta_+(\gamma(0)) + 2\pi k_0$ e defina $\alpha(t) = \theta_+(\gamma(t)) + 2\pi k_0$ para cada $t \in [0, 1/N]$. Se $\gamma([0, 1/N])$ não intersecta X_- , tome $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_0 = \theta_-(\gamma(0)) + 2\pi k_0$ e defina $\alpha(t) = \theta_-(\gamma(t)) + 2\pi k_0$ para cada $t \in [0, 1/N]$. Em qualquer dos casos, α é contínua e vale a igualdade em (12.7) para todo $t \in [0, 1/N]$. Além disso,

$$\int_{\gamma|_{[0, 1/N]}} d\theta = \theta_{\pm}(\gamma(1/N)) - \theta_{\pm}(\gamma(0)) = \alpha(1/N) - \alpha(0).$$

Prosseguindo por indução, suponha que a função α já foi construída no intervalo $[0, i/N]$ para algum $i = 1, \dots, N-1$. Repetindo a construção anterior com $\alpha_i = \alpha(i/N)$ no lugar de α_0 , obtemos uma extensão contínua da função α ao intervalo $[0, (i+1)/N]$, satisfazendo (12.7) e tal que

$$\int_{\gamma|_{[i/(i+1)/N]}} d\theta = \theta_{\pm}(\gamma((i+1)/N)) - \theta_{\pm}(\gamma(i/N)) = \alpha((i+1)/N) - \alpha(i/N).$$

Após N passos deste procedimento, obtemos uma extensão contínua da função α a todo o intervalo $[0, 1]$, satisfazendo (12.7) e

$$\int_{\gamma} d\theta = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\gamma|_{[i/(i+1)/N]}} d\theta = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha((i+1)/N) - \alpha(i/N) = \alpha(1) - \alpha(0). \quad (12.8)$$

Como a curva γ é fechada, temos que $\gamma(0) = \gamma(1)$ e portanto

$$(\cos \alpha(0), \sin \alpha(0)) = (\cos \alpha(1), \sin \alpha(1)).$$

Isto implica que $\alpha(1) = \alpha(0) + 2\pi l$ para algum $l \in \mathbb{Z}$. A relação (12.8) dá que esse inteiro l coincide com o número de voltas de γ em torno da origem. \square

12.1.2 Campos de vetores no plano

Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1 num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que existe exatamente um ponto $p \in \mathcal{U}$ tal que $F(p) = 0$. Seja $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ uma curva simples fechada em torno de p , ou seja, tal que p está no lado de dentro da curva c , no sentido do Teorema da Curva Fechada. Suponha igualmente que c está orientada no sentido anti-horário, tal como ilustrado na Figura 12.2.

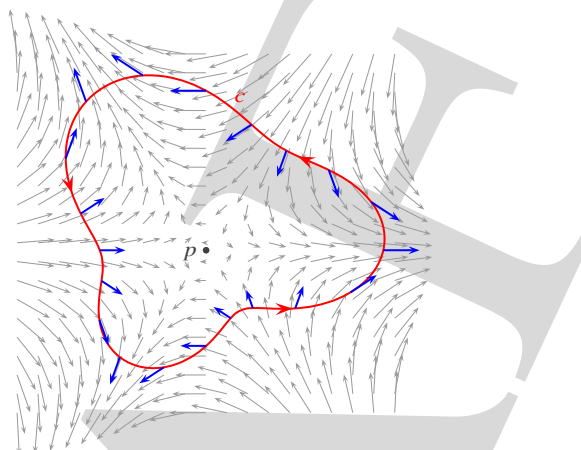


Figura 12.2: Índice num ponto estacionário isolado de um campo de vetores no plano.

Por definição, o índice do campo de vetores F no ponto p é o número de voltas da curva $F \circ c$ em torno da origem. Em outras palavras,

$$\text{ind}(F, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{F \circ c} d\theta \quad (12.9)$$

onde $d\theta$ é a 1-forma diferencial definida em (12.3). A Figura 12.3 descreve alguns exemplos.

Lema 12.3. A definição do índice $\text{ind}(F, p)$ não depende da escolha da curva simples fechada c em torno de p .

Demonstração. Para cada $r > 0$, considere a parametrização $e_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ do círculo de raio $r > 0$ e centro p dada por $e_r(t) = p + (r \cos t, r \sin t)$. Dada qualquer curva simples fechada $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \setminus \{p\}$ temos que as imagens de c e e_r são disjuntas desde que r seja suficientemente pequeno. Considere o domínio D delimitado pelas imagens das duas curvas (confira a Figura 12.4). Pelo Teorema de Stokes e o Exercício 12.18,

$$\int_{F \circ c} d\theta - \int_{F \circ e_r} d\theta = \int_c F^* d\theta - \int_{e_r} F^* d\theta = \int_D d(F^* d\theta) = 0,$$

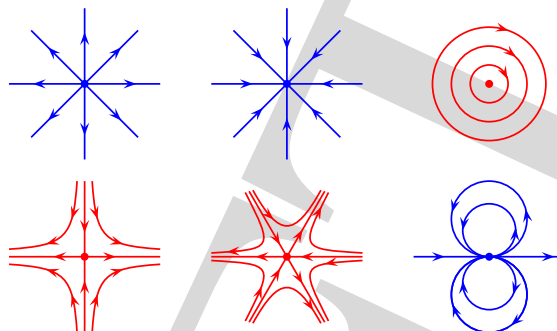


Figura 12.3: Pontos estacionários de campos de vetores no plano com índices iguais a 1, 1 e -1 na primeira linha, e -1 , -2 e 2 na segunda linha.

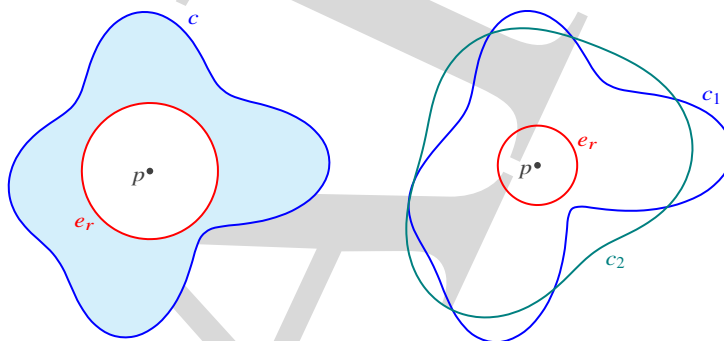


Figura 12.4: A definição do índice não depende da escolha da curva simples fechada em torno do ponto estacionário.

já que a forma diferencial $d\theta$ é fechada e, portanto, $F^*d\theta$ também é. Finalmente, dadas duas curvas simples $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ quaisquer, podemos escolher $r > 0$ suficientemente pequeno para que a imagem de e_r seja disjunta das imagens de c_1 e c_2 . Então, pelo argumento anterior,

$$\int_{F \circ c_1} d\theta = \int_{F \circ e_r} d\theta = \int_{F \circ c_2} d\theta$$

e isto prova o enunciado. \square

12.1.3 Índice de um ponto estacionário em superfícies

Agora seja F um campo de vetores de classe C^1 numa superfície compacta sem bordo M e seja p um ponto estacionário isolado de F . Inicialmente, suporemos que M está orientada e munida com uma métrica riemanniana. Na verdade, estas duas condições são supérfluas, conforme explicaremos ao final.

Considere qualquer carta local $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ compatível com a orientação de M e tal que p é o único ponto estacionário do campo de vetores em U . Seja $c : [0, 1] \rightarrow U$ uma curva simples fechada que contém p no seu lado de dentro e está orientada no sentido anti-horário. O que queremos dizer com isto é que a curva simples fechada $\varphi \circ c$ no domínio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ contém $\varphi(p)$ no seu lado de dentro e está orientada no sentido anti-horário. Note que esta condição não depende da escolha da carta local, apenas da orientação escolhida em M .

Em seguida, escolha um campo de vetores unitário \tilde{e}_1 em U e seja \tilde{e}_2 o campo de vetores unitário ortogonal a \tilde{e}_1 e tal que a base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ tem orientação positiva em todo ponto de U . Associamos ao campo de vetores F a função $\Phi = (\phi_1, \phi_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(q) = \phi_1(q)\tilde{e}_1(q) + \phi_2(q)\tilde{e}_2(q) \text{ para todo } q \in U. \quad (12.10)$$

Observe que $\Phi(p) = 0$. Por definição, o índice $\text{ind}(F, p)$ do campo de vetores F no ponto p é o número de voltas da curva $\Phi \circ c$ em torno da origem:

$$\text{ind}(F, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi \circ c} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_c \Phi^* d\theta. \quad (12.11)$$

Proposição 12.4. A definição de $\text{ind}(F, p)$ não depende das escolhas da curva simples fechada c em torno de p , do campo de vetores unitário \tilde{e}_1 e da métrica riemanniana em M .

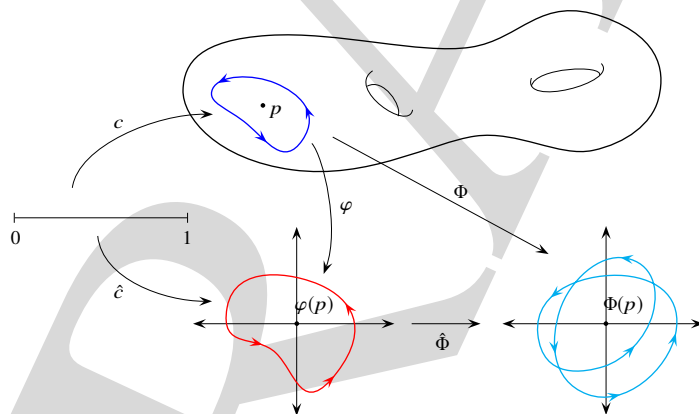


Figura 12.5: A definição do índice não depende da escolha da curva c .

Demonstração. Considere $\hat{c} = \varphi \circ c$ e $\hat{\Phi} = \Phi \circ \varphi^{-1}$ (confira a Figura 12.5). É claro que $\hat{\Phi} \circ \hat{c} = \Phi \circ c$ e, em particular, os respectivos números de voltas em torno da origem são iguais. Por outro lado, o mesmo argumento do Lema 12.3 mostra que o número

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\Phi} \circ \hat{c}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{c}} \hat{\Phi}^* d\theta$$

de voltas de $\hat{\Phi} \circ \hat{c}$ em torno da origem não depende da curva \hat{c} . Logo, $\text{ind}(F, p)$ não depende da curva c .

Afirmamos que $\text{ind}(F, p)$ também não depende da escolha de \tilde{e}_1 . De fato, considere qualquer outro campo de vetores unitário \tilde{f}_1 definido em U , e seja \tilde{f}_2 o campo de vetores unitário ortogonal a \tilde{f}_1 tal que a base $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ tem orientação positiva. Tome $\tau_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\tilde{f}_1(p) = \cos \tau_0 \tilde{e}_1(p) + \text{sen } \tau_0 \tilde{e}_2(p).$$

Então existe uma função contínua $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(p) = \tau_0$ e

$$\tilde{f}_1(q) = \cos \tau(q) \tilde{e}_1(q) + \text{sen } \tau(q) \tilde{e}_2(q) \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2(q) = -\text{sen } \tau(q) \tilde{e}_1(q) + \cos \tau(q) \tilde{e}_2(q)$$

para todo $q \in U$. Considere a função $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ com

$$F(q) = \psi_1(q) \tilde{f}_1(q) + \psi_2(q) \tilde{f}_2(q) \quad \text{para todo } q \in U. \quad (12.12)$$

Comparando com (12.10) vemos que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\text{sen } \tau \\ \text{sen } \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \Psi. \quad (12.13)$$

Escrevendo

$$\frac{\Psi(c(t))}{\|\Psi(c(t))\|} = (\cos \beta(t), \text{sen } \beta(t)),$$

a relação (12.13) dá que $\|\Phi\| = \|\Psi\|$ e

$$\frac{\Phi(c(t))}{\|\Phi(c(t))\|} = (\cos \alpha(t), \text{sen } \alpha(t)) \quad \text{com } \alpha(t) = \beta(t) + \tau(c(t)).$$

Então $\alpha(1) - \alpha(0) = \beta(1) - \beta(0) + \tau(c(1)) - \tau(c(0)) = \beta(1) - \beta(0)$. Em outras palavras, os números de voltas de $\Phi \circ c$ e $\Psi \circ c$ em torno da origem são iguais, tal como afirmamos.

Resta verificar que a definição também não depende da métrica riemanniana. Vamos argumentar por continuidade, da seguinte forma. Dadas duas métricas riemannianas $q \mapsto A_q$ e $q \mapsto B_q$ quaisquer em M , e dado qualquer $s \in [0, 1]$, a função definida por

$$A_q^s(u, v) = (1 - s)A_q(u, v) + sB_q(u, v)$$

é uma métrica riemanniana em M . De fato, é claro da definição que $q \mapsto A_q^s$ é diferenciável e que cada A_q^s é um produto interno no espaço tangente $T_p M$. Dado qualquer campo de vetores \tilde{e} em U unitário para a métrica riemanniana A , e dado qualquer $s \in [0, 1]$, considere

$$\tilde{e}^s(q) = \frac{\tilde{e}(q)}{\sqrt{A^s(\tilde{e}(q), \tilde{e}(q))}} \quad \text{para } q \in U$$

e seja \tilde{e}_2^s o campo de vetores em U tal que a base $(\tilde{e}_1^s, \tilde{e}_2^s)$ é positivamente orientada e é ortonormada relativamente à métrica riemanniana A^s . Por construção, estas bases variam continuamente com o parâmetro $s \in [0, 1]$. Defina $\Phi^s = (\phi_1^s, \phi_2^s) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante a igualdade

$$F(q) = \phi_1^s(q) \tilde{e}_1^s(q) + \phi_2^s(q) \tilde{e}_2^s(q) \quad \text{para } q \in U.$$

Então, Φ^s varia continuamente com o parâmetro s . Segue que o número de voltas da curva $\Phi^s \circ c$ em torno da origem também varia continuamente com s . Como este número é inteiro, isso significa que o número de voltas de $\Phi^s \circ c$ em torno da origem é o mesmo para todo $s \in [0, 1]$. Em particular, considerando $s = 0$ e $s = 1$, os índices do campo de vetores F calculados a partir das métricas riemannianas $q \mapsto A_q$ e $q \mapsto B_q$ são iguais. \square

Encerramos a sessão com dois comentários rápidos. O primeiro diz respeito à escolha da orientação. Se invertermos a orientação da superfície M então precisamos inverter a orientação da curva c , para que ela permaneça em sentido anti-horário. Além disso, precisamos substituir o campo de vetores \tilde{e}_2 por $-\tilde{e}_2$, para que a base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ permaneça positivamente orientada. Então, $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ é substituído por $(\phi_1, -\phi_2)$. O efeito combinado destas duas modificações é que o número de voltas de $\Phi \circ c$ em torno da origem permanece inalterado. Ou seja, a definição do índice não depende da orientação em M . Também segue que a definição faz sentido mesmo que M não seja orientável: basta escolher uma orientação na vizinhança de cada ponto estacionário, o que é sempre possível, e acabamos de ver que o valor do índice não depende dessa escolha.

O segundo comentário tem a ver com o papel da métrica riemanniana. Observemos que toda superfície (de fato, toda variedade) compacta admite alguma métrica riemanniana. O modo mais rápido de verificar esse fato é usando o Teorema de Whitney, que afirma que toda variedade compacta sem bordo pode ser realizada como subvariedade de algum espaço euclidiano. Mais precisamente, para toda variedade compacta M de classe C^r existe algum mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r . Então

$$\langle u, v \rangle_p = \langle Df(p)u, Df(p)v \rangle, \text{ para } p \in M, u \in T_p M \text{ e } v \in T_p M$$

define uma métrica riemanniana em M . Um teorema famoso de John Nash [79, 80] garante que toda métrica riemanniana é desta forma, mas esse fato é irrelevante aqui, uma vez que a Proposição 12.4 garante que o índice não depende da escolha da métrica.

12.2 Característica de Euler

Em seguida, vamos lembrar a noção de característica de Euler, para poliedros bidimensionais e superfícies compactas. O Apêndice A.6 contém uma discussão mais ampla, ainda que menos detalhada, para poliedros e variedades de qualquer dimensão.

12.2.1 Poliedros

O *triângulo* definido por três pontos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ não colineares é a sua envolvente convexa, ou seja, o conjunto

$$T = \{t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 : t_1, t_2, t_3 \geq 0 \text{ e } t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$

Os pontos v_1, v_2, v_3 são chamados *vértices*, os segmentos ligando os vértices,

$$\{t_i v_i + t_j v_j : t_i, t_j \geq 0 \text{ e } t_i + t_j = 1\} \text{ com } (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

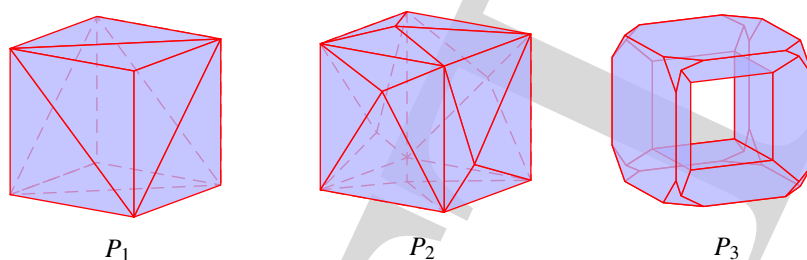


Figura 12.6: Exemplos de poliedros: os dois primeiros são convexos mas o último não.

são chamados *arestas*, e o próprio triângulo T é chamado *face*.

Chamaremos *poliedro* no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 qualquer coleção finita P de triângulos tal que dois triângulos quaisquer em P ou são disjuntos, ou têm uma única aresta em comum, ou têm um único vértice em comum. Representaremos por $|P|$ a união dos triângulos em cada poliedro P . Veja a Figura 12.6.

Observação 12.5. No sentido mais usual da palavra *poliedro*, as faces são polígonos com quaisquer números de lados. Aqui consideramos apenas faces triangulares, mas isso não constitui realmente uma restrição, uma vez que todo polígono pode ser decomposto num número finito de triângulos tendo, no máximo, uma aresta em comum (veja a Figura 12.7).

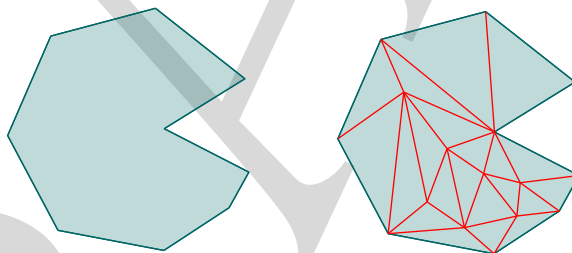


Figura 12.7: Divisão dum polígono num número finito de triângulos.

Seja V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro P . Definimos a *característica de Euler* de P como

$$\chi(P) = V - A + F. \quad (12.14)$$

Exemplo 12.6. Nos exemplos da Figura 12.6, da esquerda para a direita,

$$\chi(P_1) = 8 - 18 + 12 = 2, \quad \chi(P_2) = 14 - 36 + 24 = 2, \quad \chi(P_3) = 40 - 64 + 24 = 0.$$

Observe que P_1 e P_2 são poliedros de um mesmo espaço (um cubo), ou seja $|P_1| = |P_2|$, e que eles têm a mesma característica de Euler. Isto não é coincidência: uma propriedade crucial da característica de Euler é que ela depende apenas do espaço $|P|$ e não do próprio poliedro P (o Teorema A.12 enuncia um fato ainda mais forte).

Proposição 12.7. Se P_1 e P_2 são poliedros tais que $|P_1| = |P_2|$ então $\chi(P_1) = \chi(P_2)$.

Começemos por demonstrar um caso particular desta proposição. Dados poliedros P_1 e P_2 , dizemos que P_1 é uma subdivisão de P_2 se $|P_1| = |P_2|$ e cada face de P_1 está contida em alguma face de P_2 . Esta situação está ilustrada na Figura 12.8.

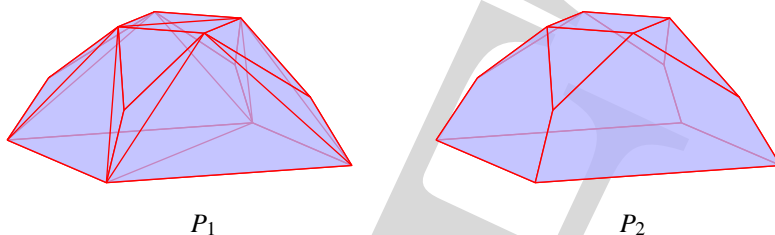


Figura 12.8: Exemplo de subdivisão de um poliedro.

Lema 12.8. Se P_1 é subdivisão de P_2 então $\chi(P_1) = \chi(P_2)$.

Demonstração. Fixe um triângulo $T \in P_2$. Como T tem 1 face, 3 arestas e 3 vértices, temos que

$$\chi(T) = 3 - 3 + 1 = 1. \quad (12.15)$$

Sejam $V(T)$, $A(T)$ e $F(T)$ os números de vértices, arestas e faces de P_1 contidos em T . Represente por α_{ij} , $i = 1, \dots, F(T)$ e $j = 1, 2, 3$ os ângulos internos das faces de P_1 contidas em T . Então,

$$\sum_{i=1}^{F(T)} \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} = F(T)\pi. \quad (12.16)$$

Para cada vértice contido em T , a soma dos ângulos internos das faces de P_1 contidas em T é igual a 2π se o vértice está no interior de T e é igual π se o vértice está no interior de alguma aresta de T . Portanto,

$$\sum_{i=1}^{F(T)} \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} = 2\pi V_i(T) + \pi V_b(T) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j = 2\pi V_i(T) + \pi V_b(T) + \pi,$$

onde $V_i(T)$ é o número de vértices de P_1 no interior de T , $V_b(T)$ é o número de vértices de P_1 no interior de arestas de T e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são os ângulos internos do próprio triângulo T . Em outras palavras,

$$\sum_{i=1}^{F(T)} \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} = 2\pi(V_i(T) + V_b(T) + 3) - \pi V_b(T) - 5\pi = 2\pi V(T) - \pi V_b(T) - 5\pi. \quad (12.17)$$

Cada aresta de P_1 no interior de T está no bordo de duas faces de P_1 dentro de T e cada aresta de P_1 no bordo de T está no bordo de uma face de P_1 dentro de T . Portanto,

$$3F(T) = 2A_i(T) + A_b(T),$$

onde $A_i(T)$ é o número de arestas de P_1 no interior de T e $A_b(T)$ é o número de arestas de P_1 no bordo de T . Consequentemente,

$$3\pi F(T) = 2\pi(A_i(T) + A_b(T)) - A_b(T) = 2\pi A(T) - \pi A_b(T). \quad (12.18)$$

Juntando (12.16), (12.17) e (12.18) obtemos

$$2\pi(V(T) - A(T) + F(T)) = \pi(V_b(T) - A_b(T) + 5).$$

O número de vértices de P_1 contidos no interior de uma aresta de T é uma unidade menor que o número de arestas de P_1 contidas nessa aresta de T . Portanto, $V_b(T) = A_b(T) - 3$. Substituindo na relação anterior, segue que

$$V(T) - A(T) + F(T) = 1.$$

Comparando esta igualdade com (12.15) vemos que a característica de Euler não é afetada quando substituimos cada face $T \in P_2$ pelas faces de P_1 nela contidas. Repetindo este procedimento para cada um das faces de P_2 , obtemos a conclusão do lema. \square

Lema 12.9. *Se P_1 e P_2 são poliedros tais que $|P_1| = |P_2|$ então existe algum poliedro Q que é subdivisão tanto de P_1 quanto de P_2 .*

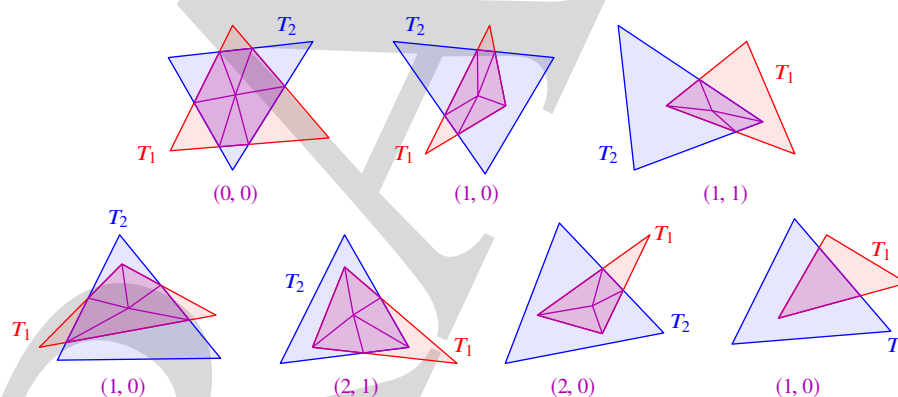


Figura 12.9: Interseções de triângulos e suas subdivisões em triângulos.

Demonstração. Considere a família \tilde{Q} das interseções $T_1 \cap T_2$ com $T_1 \in P_1$ e $T_2 \in P_2$. Lembrando que T_1 e T_2 são triângulos, cada elemento de \tilde{Q} é um polígono convexo com 3, 4, 5 ou 6 lados. Veja a Figura 12.9. Esses lados são os segmentos de arestas de um dos poliedros, P_1 ou P_2 , determinados por pontos de interseção com arestas do outro poliedro. Subdivida cada um destes polígonos em triângulos, escolhendo um ponto no seu interior e ligando-o aos vértices por meio de segmentos de reta. Desta forma obtemos uma família Q de triângulos com $|Q| = |\tilde{Q}| = |P_1| = |P_2|$.

Afirmamos que Q é um poliedro. De fato, por construção, os lados dos triângulos em Q são

- (i) os segmentos no interior dos polígonos de \tilde{Q} que introduzimos para a subdivisão que acabamos de descrever;
- (ii) os segmentos de arestas de um dos poliedros, P_1 ou P_2 , determinados por pontos de interseção com arestas do outro poliedro.

Por um lado, é claro da construção que se dois triângulos em Q estão contidos num mesmo polígono de \tilde{Q} então eles se intersectam num único ponto, ou ao longo de uma das arestas do tipo (i). Por outro lado, se eles estão em polígonos distintos de \tilde{Q} então a sua interseção é vazia, consiste de um único vértice ou está formada por uma única aresta do tipo (ii). Em qualquer dos casos, está satisfeita a condição (b) na definição de poliedro. \square

Demonstração da Proposição 12.7. É uma consequência imediata dos Lemas 12.8 e 12.9: dados dois poliedros P_1 e P_2 com $|P_1| = |P_2|$, considere uma subdivisão comum qualquer Q ; então $\chi(P_1) = \chi(Q) = \chi(P_2)$. \square

Dizemos que um poliedro P é *convexo* se o espaço $|P|$ é o bordo de um domínio compacto convexo $\Omega(P)$ de \mathbb{R}^3 . Confira a Figura 12.6. O resultado fundador da noção de característica de Euler é o seguinte teorema:

Teorema 12.10 (Euler). *Todo poliedro convexo tem característica de Euler igual a 2.*

Demonstração. Seja P um poliedro convexo qualquer e seja P_0 um tetraedro regular. Como $\chi(P_0) = 4 - 6 + 4 = 2$, basta mostrar que $\chi(P) = \chi(P_0)$. Como a característica de Euler não é afetada por movimentos rígidos nem homotetias, podemos supor que a origem está no interior do domínio $\Omega(P_0)$ e que $\Omega(P_0)$ está contido no interior de $\Omega(P)$. Então, por convexidade, toda semirreta a partir da origem intersecta cada um dos espaços $|P|$ e $|P_0|$ num único ponto. Portanto, a projeção radial $\phi : |P_0| \rightarrow |P|$ está bem definida e é um homeomorfismo. Mais ainda, ϕ é afim por pedaços no seguinte sentido: dados quaisquer triângulos $T \in P$ e $T_0 \in P_0$, as interseções $T_0 \cap \phi^{-1}(T)$ e $\phi(T_0) \cap T$ são polígonos convexos (com 3 a 6 lados) e a restrição

$$\phi : T_0 \cap \phi^{-1}(T) \rightarrow \phi(T_0) \cap T$$

é um homeomorfismo afim. Considere a família de polígonos

$$\tilde{Q} = \{T_0 \cap \phi^{-1}(T) : T_0 \in P_0 \text{ e } T \in P\}.$$

Subdividindo cada elemento de \tilde{Q} em triângulos, do mesmo modo que na demonstração do Lema 12.9, obtemos um poliedro Q que é uma subdivisão de P_0 . Em particular, $|Q| = |P_0|$. Além disso, como ϕ é afim em cada elemento de \tilde{Q} , a imagem $\phi(Q)$ é um poliedro e, por construção, é uma subdivisão de P . É claro que $\chi(Q) = \chi(\phi(Q))$, pois ϕ envia vértices, arestas e faces de Q em vértices, arestas e faces de $\phi(Q)$. Logo, usando o Lema 12.8, temos que $\chi(P_0) = \chi(Q) = \chi(\phi(Q)) = \chi(P)$. \square

12.2.2 Superfícies

Em seguida, vamos estender a definição da característica de Euler para superfícies. Chamamos *triangulação* de uma superfície M um homeomorfismo $\phi : |P| \rightarrow M$, onde P é um poliedro. Dizemos que P *triangula* M . A família

$$\phi(P) = \{\phi(T) : T \in P\}$$

é chamada *poliedro* (curvilíneo) em M e os seus elementos são chamados *triângulos* (curvilíneos) em M . Veja a Figura 12.10. Chamamos *vértices*, *arestas* e *faces* da triangulação as imagens por ϕ dos vértices, arestas e faces de P . Note que duas faces quaisquer ou são disjuntas, ou se intersectam ao longo de uma única aresta, ou a sua interseção consiste de um único vértice, tal como na condição (b) da definição de poliedro.

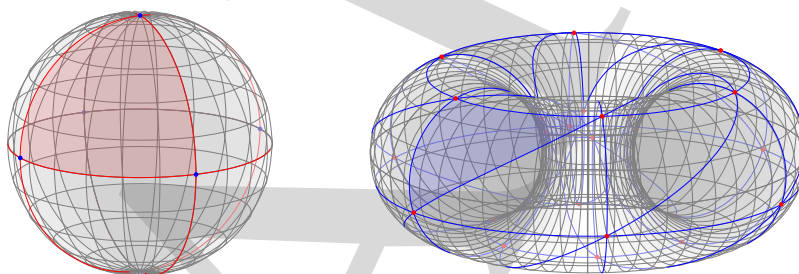


Figura 12.10: Triangulações da esfera e do toro.

Conforme comentamos no Apêndice A.6, num contexto mais geral, toda superfície admite alguma triangulação. Além disso, se $\phi_1 : |P_1| \rightarrow M$ e $\phi_2 : |P_2| \rightarrow M$ são triangulações de uma mesma superfície então $\chi(P_1) = \chi(P_2)$. Isto permite definir a *característica de Euler* de uma superfície M como sendo a característica de Euler de qualquer poliedro P que triangula M . É claro da definição que a característica de Euler é um invariante topológico. De fato, suponha que M e N são superfícies homeomorfas. Seja $f : M \rightarrow N$ um homeomorfismo e seja $\phi : |P| \rightarrow M$ uma triangulação de M . Então $f \circ \phi : |P| \rightarrow N$ é uma triangulação de N e, portanto, $\chi(M) = \chi(P) = \chi(N)$.

Observação 12.11. As noções de triangulação e de característica de Euler estendem-se naturalmente para superfícies com bordo, exigindo que cada componente conexa do bordo seja formada por vértices e arestas. Por exemplo, tanto o cilindro como a faixa de Möbius admitem triangulações com 6 vértices, 12 arestas e 6 faces, na qual cada componente do bordo está formada por 3 vértices e 3 arestas. Confira a Figura 12.11. Portanto, a característica de Euler de qualquer destas duas superfícies com bordo é igual a zero.

Exemplo 12.12. Observando que o tetraedro regular triangula a esfera \mathbb{S}^2 , obtemos imediatamente que a característica de Euler da esfera é igual a $4 - 6 + 4 = 2$. A

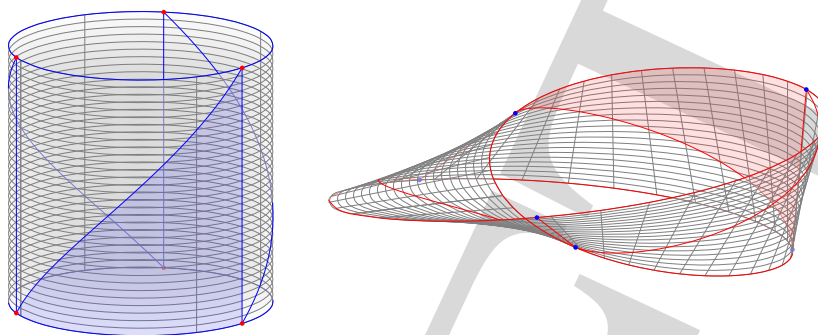


Figura 12.11: Triangulações de superfícies com bordo: cilindro e faixa de Möbius.

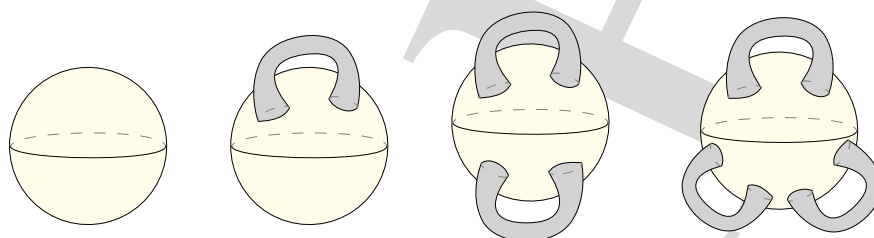


Figura 12.12: Toda superfície compacta orientável pode ser representada como uma “esfera com alças”.

partir deste fato, podemos calcular a característica de Euler de toda superfície compacta orientável, do seguinte modo. Confira a Figura 12.12.

Fixe um inteiro $g \geq 1$. Considere uma triangulação da esfera num número de triângulos muito maior que g e tal que $2g$ desses triângulos (pelo menos) são discos diferenciáveis. Represente por \tilde{M}_g a superfície com bordo obtida removendo da esfera os interiores desses discos. Observe que

$$\chi(\tilde{M}_g) = \chi(\mathbb{S}^2) - 2g = 2 - 2g.$$

Em seguida, considere g cópias do cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ munidas com uma triangulação com 6 vértices, 12 arestas e 6 faces, tal como ilustrada na Figura 12.11. Represente por M_g a superfície compacta obtida colando estes cilindros (que chamaremos *alças*) com \tilde{M}_g , diferenciavelmente ao longo das componentes do bordo, de tal forma que as respectivas arestas e vértices ficam identificados.

Por construção, M_g vem munida com uma triangulação, obtida das triangulações de \tilde{M}_g e das g alças mediante identificação das arestas e vértices nas componentes do bordo. Como as alças têm um total de $2g$ componentes de bordo, cada uma com 3 vértices e 3 arestas, esta identificação faz com que o número de vértices seja reduzido em $6g$, e igualmente para o número de arestas. Desta forma, concluímos que

$$\chi(M_g) = \chi(\tilde{M}_g) + g(6 - 12 + 6) - 6g + 6g = \chi(\tilde{M}_g) = 2 - 2g.$$

A escolha de quais componentes do bordo de \tilde{M}_g são identificadas com as componentes do bordo de uma mesma alça não é relevante: pode mostrar-se que diferentes escolhas produzem superfícies M_g que são difeomorfas. O Teorema de Classificação de Superfícies afirma que dada qualquer superfície compacta sem bordo orientável M existe exatamente um valor de $g \geq 0$, que é chamado *gênero* da superfície, tal que M é difeomorfa a M_g (com a convenção $M_0 = \mathbb{S}^2$). Logo, $\chi(M) = \chi(M_g) = 2 - 2g$.

Analogamente, a superfície com bordo $M_{g,r}$ obtida “retirando” r discos diferenciáveis disjuntos de M_g tem característica de Euler $\chi(M_{g,r}) = 2 - 2g - r$. Confira o Exercício 12.14.

12.3 Índices e curvatura

O ingrediente crucial da demonstração do Teorema de Poincaré–Hopf e do Teorema de Gauss–Bonnet para superfícies orientáveis é a relação entre a curvatura de Gauss e a soma dos índices dos campos de vetores contida na proposição a seguir. Utilizaremos a caracterização da curvatura de Gauss dada pelo Teorema A.14 (recomendamos ao leitor que leia o Apêndice A.7 antes de seguir adiante).

Proposição 12.13. *Seja M uma superfície compacta sem bordo orientável munida com uma métrica riemanniana. Seja $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ a curvatura de Gauss e ω a forma de área associadas a g . Então, para qualquer campo de vetores de classe C^1 em M com um número finito de pontos estacionários, p_1, \dots, p_N ,*

$$\int_M K \omega = 2\pi \sum_{i=1}^N \text{ind}(F, p_i). \quad (12.19)$$

Observe que a expressão do lado esquerdo de (12.19) depende apenas da métrica riemanniana, e não do campo de vetores. Pelo contrário, a expressão do lado direito de (12.19) depende apenas do campo de vetores, e não da métrica riemanniana.

Demonstração da Proposição 12.13. Sejam $\varphi_i : U_i \rightarrow X_i$, $i = 1, \dots, N$ cartas locais compatíveis com a orientação da superfície M , tais que $p_i \in U_i$ para cada $i = 1, \dots, N$ e os domínios U_i são disjuntos dois-a-dois. Para cada $i = 1, \dots, N$, seja $c : i \rightarrow U_i \setminus \{p_i\}$ uma curva simples fechada diferenciável contendo p_i no seu lado de dentro D_i e orientada em sentido anti-horário.

Seja $\tilde{M} = M \setminus \bigcup_{i=1}^N D_i$. Então, \tilde{M} é uma superfície compacta com bordo e F não têm pontos estacionários em \tilde{M} . Considere o campo de vetores unitário definido em \tilde{M} por

$$e_1(p) = \frac{F(p)}{\|F(p)\|_p}, \quad \text{onde } \|F(p)\|_p = \sqrt{\langle F(p), F(p) \rangle_p},$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ a métrica riemanniana em M , e seja e_2 o campo de vetores unitário ortogonal a e_1 e tal que $(e_1(p), e_2(p))$ é base positivamente orientada de $T_p M$ para todo $p \in \tilde{M}$. Então (e_1, e_2) é um referencial em \tilde{M} , no sentido do Apêndice A.7. Sejam (ω_1, ω_2) o referencial dual e ω_{12} a forma de conexão, dada no Teorema A.14:

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \quad \text{e} \quad d\omega_{12} = -K\omega. \quad (12.20)$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos que

$$\int_{\tilde{M}} -K\omega = \int_{\tilde{M}} d\omega_{12} = \int_{\partial\tilde{M}} \omega_{12} = - \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \omega_{12} \quad (12.21)$$

(o sinal – vem do fato de que c_i está orientado negativamente com respeito ao domínio \tilde{M}).

Para cada $i = 1, \dots, N$, escolha um campo de vetores unitário \tilde{e}_1^i em U_i . Além disso, seja \tilde{e}_2^i o campo de vetores unitário ortogonal a \tilde{e}_1^i tal que $(\tilde{e}_1^i, \tilde{e}_2^i)$ é base positivamente orientada em todo o domínio U_i . Seja $\tilde{\omega}_{12}^i$ a forma de conexão do referencial $(\tilde{e}_1^i, \tilde{e}_2^i)$: por definição, ela satisfaz

$$d\tilde{\omega}_1^i = \tilde{\omega}_{12}^i \wedge \tilde{\omega}_2^i, \quad d\tilde{\omega}_2^i = \tilde{\omega}_1^i \wedge \tilde{\omega}_{12}^i \quad \text{e} \quad d\tilde{\omega}_{12}^i = -K\omega. \quad (12.22)$$

Usando mais uma vez o Teorema de Stokes,

$$\int_{D_i} -K\omega = \int_{D_i} d\tilde{\omega}_{12}^i = \int_{c_i} \tilde{\omega}_{12}^i \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (12.23)$$

Somando (12.21) e (12.23), obtemos

$$\int_M K\omega = \sum_{i=1}^N \int_{c_i} (\omega_{12} - \tilde{\omega}_{12}^i). \quad (12.24)$$

Para calcular as integrais do lado direito, precisamos relacionar as bases (e_1, e_2) e $(\tilde{e}_1^i, \tilde{e}_2^i)$. Consideremos a função $\Phi^i = (\phi_1^i, \phi_2^i) : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(p) = \phi_1^i(p)\tilde{e}_1^i(p) + \phi_2^i(p)\tilde{e}_2^i(p) \quad \text{para } p \in U_i.$$

Por definição (lembre de (12.10) e (12.11)),

$$\text{ind}(F, p_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi^i \circ c_i} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{c_i} (\Phi^i)^* d\theta. \quad (12.25)$$

De acordo com a definição (12.4),

$$\Phi^i(p) = \|\Phi^i(p)\|_p (\cos \theta_{\pm}(\Phi^i(p)), \text{sen } \theta_{\pm}(\Phi^i(p))) \quad \text{sempre que } \Phi^i(p) \in \mathbb{R}^2 \setminus X_{\pm}$$

Lembrando que $e_1(p) = F(p)/\|F(p)\|_p = \Phi^i(p)/\|\Phi^i(p)\|_p$, segue que

$$e_1(p) = \cos \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \tilde{e}_1^i(p) + \text{sen } \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \tilde{e}_2^i(p)$$

e isto acarreta que

$$e_2(p) = -\text{sen } \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \tilde{e}_1^i(p) + \cos \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \tilde{e}_2^i(p).$$

Veja a Figura 12.13. Então, os referenciais duais satisfazem

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1,p}^i &= \cos \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \omega_{1,p} - \text{sen } \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \omega_{2,p} \quad \text{e} \\ \tilde{\omega}_{2,p}^i &= \text{sen } \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \omega_{1,p} + \cos \theta_{\pm}(\Phi^i(p)) \omega_{2,p}. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Usando o Exercício 12.18 e a igualdade (12.5), vemos que

$$D(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) = (\Phi^i)^* D\theta_{\pm} = (\Phi^i)^* d\theta.$$

Logo, derivando (12.26) e usando (12.20), obtemos

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_1^i &= \cos(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) d\omega_1 - \sin(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) d\omega_2 \\ &\quad - \sin(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) (\Phi^i)^* d\theta \wedge \omega_1 - \cos(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) (\Phi^i)^* d\theta \wedge \omega_2 \\ &= \cos(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) \omega_{12} \wedge \omega_2 - \sin(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ &\quad - (\Phi^i)^* d\theta \wedge (\sin(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) \omega_1 + \cos(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) \omega_2) \\ &= (\omega_{12} - (\Phi^i)^* d\theta) \wedge (\sin(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) \omega_1 + \cos(\theta_{\pm} \circ \Phi^i) \omega_2) \\ &= (\omega_{12} - (\Phi^i)^* d\theta) \wedge \tilde{\omega}_2^i \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$d\tilde{\omega}_2^i = \tilde{\omega}_1^i \wedge (\omega_{12} - (\Phi^i)^* d\theta).$$

Figura 12.13: Relacionando dois referenciais numa superfície M .

Comparando estas igualdades com (12.22), e usando a unicidade da forma de conexão, concluímos que $\tilde{\omega}_{12}^i = \omega_{12} - (\Phi^i)^* d\theta$. Consequentemente,

$$\int_{c_i} (\omega_{12} - \tilde{\omega}_{12}^i) = \int_{c_i} (\Phi^i)^* d\theta = 2\pi \operatorname{ind}(F, p_i). \quad (12.27)$$

Substituindo em (12.24), obtemos a afirmação (12.19) no enunciado. \square

12.4 Demonstração do teorema

Estamos prontos para demonstrar o Teorema 12.1 no caso em que M é uma superfície compacta sem bordo e orientável. A Proposição 12.13 implica que a soma dos índices dos pontos estacionários não depende do campo de vetores. Portanto, basta construir *algum* campo de vetores para o qual a soma dos índices dos pontos estacionários satisfaz a igualdade no enunciado do teorema.

Começemos com uma triangulação qualquer da superfície M . Em cada face dessa triangulação introduzimos 4 novos vértices, tal como descrito na Figura 12.14: um

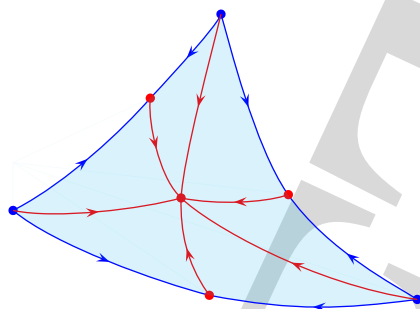


Figura 12.14: Refinando uma triangulação na superfície.

vértice no interior da face e os outros três nas três arestas no bordo. Cada uma dessas arestas no bordo é dividida em duas, orientadas apontando para o novo vértice. Também introduzimos seis novas arestas, ligando os três vértices originais e os três novos vértices no bordo ao vértice no interior e orientadas apontando para este último. Desta forma, a face original fica dividida em 6 novas faces.

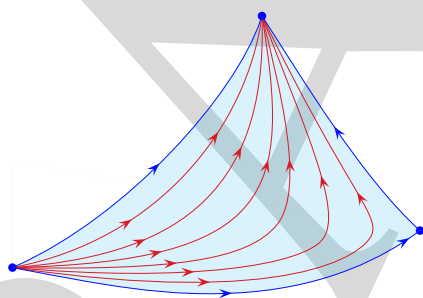


Figura 12.15: Campo de vetores na triangulação.

Agora podemos definir um campo de vetores F , tal como descrito na Figura 12.15: em cada uma das novas faces há três pontos estacionários, que coincidem com os vértices da face, e as arestas são trajetórias regulares, com a mesma orientação. Portanto, F tem um ponto estacionário em cada vértice, cada aresta e cada face da triangulação original. Os pontos estacionários nos vértices são repulsores (índice = +1) e os pontos estacionários nas faces são atratores (índice = +1), enquanto que os pontos estacionários nas arestas são selas de multiplicidade 1 (índice = -1). Isto significa que a soma de todos os índices é igual a $V - A + F = \chi(M)$, tal como afirmado.

Isto completa a demonstração do Teorema 12.1. Como consequência imediata desse teorema e da Proposição 12.13, também obtemos

Teorema 12.14 (Gauss–Bonnet). *Seja M uma superfície compacta sem bordo e orien-*

tável, munida com uma métrica riemanniana. Então

$$\int_M K\omega = 2\pi\chi(M). \quad (12.28)$$

Observe que o lado esquerdo dependeria da métrica riemanniana, em princípio, mas o lado direito depende apenas da topologia da superfície ambiente.

Observação 12.15. Não é difícil estender o teorema para o caso não orientável, usando o fato de que para qualquer superfície compacta não orientável M existe uma superfície compacta orientável \tilde{M} e um difeomorfismo local $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ tal que $\#\pi^{-1}(y) = 2$ para todo $y \in M$. Tal superfície \tilde{M} é chamada *recobrimento duplo orientável* de M ; a sua característica de Euler está dada por $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$. Dada qualquer métrica riemanniana em M existe exatamente uma métrica riemanniana em \tilde{M} tal que π é uma isometria local e, em particular, preserva a curvatura de Gauss e a forma de área:

$$K(\pi(x)) = \tilde{K}(x) \quad \text{e} \quad \omega_{\pi(x)}(D\pi(x)u, D\pi(x)v) = \tilde{\omega}_x(u, v)$$

para quaisquer $x \in \tilde{M}$ e $u, v \in T_x\tilde{M}$. Aplicando o Teorema 12.14 à superfície \tilde{M} , e lembrando que π é uma aplicação dois-a-um, vemos que

$$2\pi\chi(\tilde{M}) = \int_{\tilde{M}} \tilde{K}\tilde{\omega} = \int_{\tilde{M}} (K \circ \pi)\tilde{\omega} = 2 \int_M K\omega.$$

Dividindo por 2 obtemos o enunciado do teorema para a superfície M .

12.5 Experimento: ciclo oxigênio-ozônio

Na teoria das equações diferenciais, a palavra *rigidez* (em inglês: *stiffness*) refere-se a situações em que o cálculo numérico de soluções exige um espaçamento h muito menor do que seria de esperar face aos dados do problema, tornando o tempo de integração proibitivamente longo.

Encontramos um caso desses no Exercício 4.19: o método de Euler aplicado à equação diferencial $x' = -cx$ dá

$$x_{n+1} = x_n + hF(t_n, x_n) = x_n(1 - ch) \quad (12.29)$$

e, portanto, $x_n = x_0(1 - ch)^n$ para todo n . Se $h \geq 2/c$ a sequência $(x_n)_n$ nem sequer converge para zero (confira a Figura 12.16). Portanto, para que o método de Euler forneça uma aproximação minimamente razoável do comportamento da solução exata $x(t) = x_0e^{-ct}$ é *necessário* que o espaçamento seja menor que $2/c$. Note que esta condição se torna mais exigente quando c aumenta.

Embora a ideia de rigidez seja bastante clara para os especialistas, não existe uma definição precisa: as várias “definições” apresentadas na literatura (que estão longe de serem equivalentes) não passam de explicações mais ou menos específicas para o surgimento de rigidez em algumas equações diferenciais, mas não em outras. Aliás, é importante ressaltar que, apesar de muitas vezes se falar em *equações diferenciais*

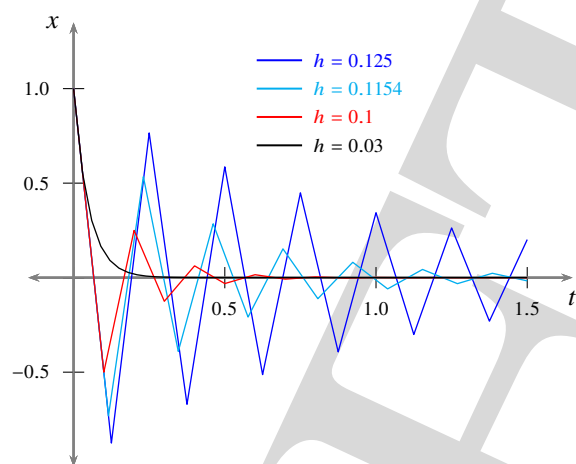


Figura 12.16: Método de Euler (explícito) aplicado à equação $x' = -cx$ com condição inicial $x(0) = 1$, para $c = 15$ e diferentes valores do espaçamento h .

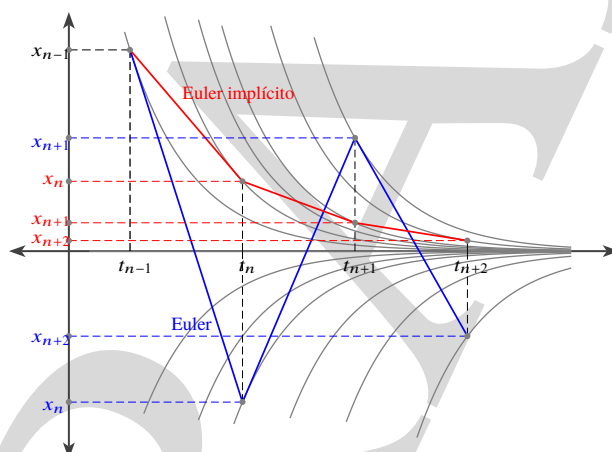


Figura 12.17: Na presença de soluções que variam rapidamente, o método de Euler (explícito) tende a “exagerar” na busca da solução. O método de Euler implícito tira melhor proveito do comportamento das soluções em todo o intervalo de integração.

rígidas, o fenômeno de rigidez não é uma característica da equação: ele também depende da condição inicial e até do método numérico utilizado.

O exemplo $x' = -cx$ acima exibe um desses mecanismos causadores de rigidez em muitas equações diferenciais: a existência de uma solução muito suave (no caso, a função constante $x(t) \equiv 0$) na vizinhança da qual existem soluções que variam muito rapidamente com o tempo. A Figura 12.17 ajuda a entender a dificuldade do método de Euler para tratar situações como essa: na presença de soluções que variam rapidamente

no intervalo de integração, o método de Euler tende a “exagerar” na busca da solução desejada; por isso, para evitar oscilações fora de controle em torno da solução, torna-se necessário tomar um espaçamento muito pequeno, o que torna a progressão do cálculo muito lenta. Observações análogas se aplicam, com mais ou menos propriedade, para a grande maioria dos métodos numéricos (ditos *diretos*, ou *explícitos*) que introduzimos anteriormente.

Em muitos casos como esse, é possível resolver esta dificuldade utilizando outro tipo de métodos numéricos, chamados *regressivos*, ou *implícitos*, que tiram melhor proveito do comportamento das soluções em todo o intervalo de integração. Já encontramos um método desse tipo no Exercício 7.18: o método de Euler implícito

$$x_{n+1} = x_n + hF(t_{n+1}, x_{n+1}). \quad (12.30)$$

Quando aplicado à equação (12.29), ele dá

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + ch}, \quad (12.31)$$

e, portanto, $x_n = x_0(1 + ch)^{-n}$ para todo n . Para valores de h não muito pequenos, esta sequência está muito mais próxima do comportamento da solução $x(t) = x_0e^{-ct}$ do que a sequência dada pelo método Euler explícito (12.29): compare as Figuras 12.16 e 12.18. A Figura 12.17 ajuda a entender porquê: usando o valor da função F no extremo direito do intervalo de integração, o método de Euler implícito consegue uma adaptação muito melhor ao comportamento das soluções.

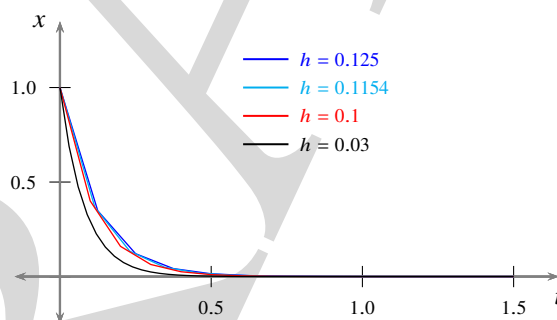


Figura 12.18: Método de Euler implícito aplicado à equação $x' = -cx$ com condição inicial $x(0) = 1$, para $c = 15$ e diferentes valores do espaçamento h .

Essa vantagem tem um preço: ao contrário de (12.29), a relação (12.30) não fornece o valor de x_{n+1} explicitamente. No caso particular da equação diferencial linear $x' = -cx$ foi muito fácil explicitar x_{n+1} analiticamente, e foi assim que procedemos para obter (12.31). Em geral, precisamos extrair o valor de x_{n+1} da relação (12.30) usando algum método numérico, tal como o método de Newton por exemplo. Isso tem um custo computacional, evidentemente. No entanto, em muitas aplicações esse custo é mais do que compensado pela eficácia dos métodos implícitos para integrar equações diferenciais com rigidez.

No Exercício 7.19 introduzimos outro método numérico implícito, o método de Crank-Nicolson. Outro método implícito, de ordem superior, é calculado pela função `ode23s` do MATLAB/Octave.

Muitas vezes, por trás do comportamento rígido está o fato de que a equação diferencial descreve diversos fenômenos, relacionados mas distintos, que têm lugar em escalas de tempo muito diferentes. Por exemplo, a maior parte dos processos químicos interessantes consistem de diversas reações químicas concomitantes, algumas rápidas outras lentas, interagindo mutuamente. Assim, muitas das equações diferenciais da Química apresentam rigidez, como vamos ilustrar com o seguinte exemplo.

O ciclo de Chapman modela a produção e destruição de ozônio O_3 na estratosfera terrestre, por ação dos raios ultravioletas do Sol. Ele consiste de quatro estágios:

1. Moléculas O_2 de oxigênio são cindidas em pares de átomos isolados O por ação dos raios ultravioletas: $O_2 + uv \rightarrow O + O$. Esta é uma reação lenta, com taxa de reação $k_1 = 3 \times 10^{-12}$.
2. Na presença de uma substância não reativa M , átomos isolados combinam-se com moléculas de oxigênio para produzir moléculas de ozônio: $M + O + O_2 \rightarrow M + O_3$. Esta reação é muito lenta: a sua taxa de reação é $k_2 = 1,22 \times 10^{-33}$.
3. Sob a ação dos raios ultravioletas, a molécula de ozônio é quebrada em uma molécula de oxigênio mais um átomo isolado: $O_3 + uv \rightarrow O + O_2$. Esta reação é rápida, com taxa de reação $k_3 = 5,5 \times 10^{-4}$.
4. Alternativamente, moléculas de ozônio podem combinar-se com átomos isolados, dando origem a duas moléculas de oxigênio: $O + O_3 \rightarrow O_2 + O_2$. Esta também é uma reação lenta, com taxa de reação $k_4 = 6,86 \times 10^{-16}$.

Figura 12.19: Soluções do ciclo de Chapman (12.32) calculadas pelo método `ode23s`.

Seja $x = [O]$ a concentração de átomos isolados O , $y = [O_2]$ a concentração de oxigênio molecular O_2 , $z = [O_3]$ a concentração de ozônio O_3 e $m = [M]$ a concentração do catalizador M . Esta última é constante ao longo do tempo, evidentemente. Ela tem um papel fundamental para a presença de ozônio, já que a segunda reação (criação de O_3) é muito mais lenta que as duas últimas (destruição de O_3). De acordo com as leis

da Cinética Química, as demais concentrações evoluem segundo a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} x' = 2k_1y - k_2mxy + k_3z - k_4xz \\ y' = -k_1y - k_2mxy + k_3z + 2k_4xz \\ z' = k_2mxy - k_3z - k_4xz. \end{cases} \quad (12.32)$$

Objetivos:

1. Considere $m = 9 \times 10^{17}$. Encontre soluções aproximadas da equação (12.32) utilizando os seguintes métodos: RKF45, Euler implícito, Crank-Nicolson e ode23s. Represente os resultados graficamente (confira a Figura 12.19).
2. Compare os desempenhos desses métodos em termos da qualidade dos resultados relativamente ao tempo de execução. Consegue identificar o fenômeno de rigidez? Note que as diferenças ficam mais claras quando integramos a equação em intervalos longos de tempo.
3. Verifique que a solução com condição inicial $x(0) = 4 \times 10^{16}$, $y(0) = 2 \times 10^{16}$ e $z(0) = 2 \times 10^{16}$ tende a um estado “estacionário” do sistema.
4. Experimente com diferentes condições iniciais e concentrações do catalizador. Busque cenários interessantes.

Aproveite para refletir sobre as vantagens e desvantagens dos diferentes métodos numéricos utilizados nos experimentos computacionais ao longo do livro. Em que condições você escolheria cada um dos métodos apresentados?

12.6 Exercícios

Exercício 12.1. Para cada um dos campos de vetores $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a seguir, calcule o índice na origem e desenhe suas curvas integrais nos seguintes casos:

1. $F(x, y) = (-y, x)$,
2. $F(x, y) = (ax, by)$, $a, b \neq 0$,
3. $F(z) = z^n$, $z = x + iy$ e $n \geq 1$,
4. $F(z) = \bar{z}^n$, $z = x + iy$ e $n \geq 1$.

Exercício 12.2. Verifique que o índice de uma sela generalizada de multiplicidade m (Seção 11.4) é igual a $-m$ e deduza a Fórmula de Euler–Poincaré (11.16).

Exercício 12.3. Seja M uma superfície compacta orientável e seja F um campo de vetores em M com um ponto estacionário isolado $p \in M$. Seja $\partial D_r(p) \subset M$ o bordo do disco geodésico com centro em p e raio r . Seja $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal positivamente orientado numa vizinhança de p e ω_{12} a forma de conexão associada. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D_r(p)} \omega_{12} ds = \text{ind}(F, p).$$

Exercício 12.4. Para cada $d \geq 2$, considere a esfera de dimensão $d - 1$,

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}.$$

1. Verifique que a forma diferencial $d\theta$ definida por

$$d\theta_p(v_1, \dots, v_{d-1}) = \det(v_1, \dots, v_{d-1}, p) \text{ para } p \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ e } v_1, \dots, v_{d-1} \in T_p\mathbb{S}^{d-1}$$

é uma forma de volume em \mathbb{S}^{d-1} .

2. Mostre que se $f : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ é uma aplicação de classe C^1 então existe um número inteiro, que representamos por $\text{grau}(f)$, tal que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f^* d\theta = \text{grau}(f) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\theta.$$

3. Se $f, g : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ são aplicações próximas na topologia C^1 então $\text{grau}(f) = \text{grau}(g)$.

Exercício 12.5. Seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto estacionário isolado de um campo de vetores F de classe C^1 num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$. Seja $c : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathcal{U}$ um mergulho de classe C^1 cuja imagem está contida numa pequena vizinhança de p e contém o ponto estacionário no seu lado de dentro. Defina $\text{ind}(F, p)$ como sendo o grau da aplicação

$$\mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}, \quad x \mapsto \frac{F(c(x))}{\|F(c(x))\|}.$$

Verifique que a definição não depende da escolha do mergulho c e que ela coincide com a definição de índice na Seção 12.1.2 no caso particular $d = 2$.

Exercício 12.6. Seja $p \in M$ um ponto estacionário isolado de um campo de vetores F de classe C^1 numa variedade M de dimensão $d \geq 2$. Seja $c : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow M$ um mergulho de classe C^1 cuja imagem está contida numa pequena vizinhança V de p e contém o ponto estacionário no seu lado de dentro. Considere campos de vetores linearmente independentes $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_d$ na vizinhança V e a aplicação

$$\Phi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \Phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_d(x)) \text{ caracterizada por } F(c(x)) = \sum_{i=1}^d \phi_i(x) \tilde{e}_i(x).$$

Defina $\text{ind}(F, p)$ como sendo o grau da aplicação

$$\mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}, \quad x \mapsto \frac{\Phi(c(x))}{\|\Phi(c(x))\|}.$$

Verifique que a definição não depende das escolhas do mergulho c e dos campos de vetores $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_d$ e coincide com a definição de índice na Seção 12.1.3 no caso particular $d = 2$.

Exercício 12.7. Sejam P e Q poliedros com a mesma dimensão $d \geq 2$. Mostre que se $\phi : |P| \rightarrow |Q|$ é um homeomorfismo afim por pedaços então existem subdivisões P' e Q' de P e Q , respectivamente, tais que a restrição de ϕ a cada elemento de P' é um homeomorfismo afim sobre algum elemento de Q' .

[Observação: O caso $d = 2$ está contido na demonstração do Lema 12.9.]

Exercício 12.8. Verifique os passos da seguinte demonstração do Teorema 12.10, dada por Cauchy em 1811. Seja $\phi : P \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma triangulação qualquer da esfera.

1. Verifique que se removermos o interior de uma face de P obtemos um poliedro P_0 com $\chi(P_0) = \chi(P) - 1$.
2. Justifique que existe um mergulho $\psi : P_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, o poliedro P_0 triangula um domínio do plano.
3. Considere um triângulo $T \in P_0$ no bordo do poliedro e seja P_1 o poliedro obtido removendo T juntamente com as suas faces que não são compartilhadas com outras faces de P_0 . Verifique que $\chi(P_1) = \chi(P_0)$.
4. Construa uma sequência P_n de poliedros com número decrescente de faces e tal que $\chi(P_n)$ é constante e use-a para deduzir que $\chi(P) = 2$.

[Observação: No passo 3 há dois casos a considerar: T compartilha 2 arestas e 3 vértices ou 1 aresta e 2 vértices.]

Exercício 12.9. Mostre que se c é uma curva simples fechada no plano contendo a origem no seu lado de dentro então o número de voltas de c em torno da origem é igual a ± 1 , com o sinal dependendo da orientação da curva.

Exercício 12.10. Seja $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ uma aplicação de classe C^1 no disco unitário do plano. Justifique (sem usar o Teorema de Brouwer!) que o campo de vetores $F : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) = f(x) - x$, tem algum ponto estacionário (ou seja, que f tem algum ponto fixo) em \mathbb{D} .

Exercício 12.11. Na Cidade dos Lagos há 7 lagoas, conectadas por 10 canais, de tal modo que é possível navegar de uma lagoa até qualquer outra pelos canais. Quantas ilhas tem a Cidade dos Lagos?

Exercício 12.12. Desenhe um campo de vetores na esfera que:

1. tenha dois nós,
2. tenha dois centros,
3. tenha um único ponto estacionário,
4. tenha 3 pontos estacionários.

Exercício 12.13. Desenhe um campo de vetores em um toro que:

1. não tenha pontos estacionários,

2. tenha dois centros de duas selas,
3. tenha um centro e uma sela,
4. tenha um dipolo e duas selas.

Exercício 12.14. Assuma que toda superfície M compacta orientável com bordo é homomorfa a uma superfície compacta de gênero g “retirando” r discos disjuntos.

1. Mostre que a característica de Euler de M é dada por $2 - 2g - r$.
2. Mostre que a característica de Euler do disco unitário fechado é $\chi(\overline{\mathbb{D}}) = 1$.

Exercício 12.15. Sejam M_1 e M_2 duas superfícies orientáveis fechadas, ou seja, compactas sem bordo. A soma conexa de M_1 e M_2 é definida da seguinte forma: Sejam $D_i \subset M_i$, $i = 1, 2$, discos abertos em cada uma das superfícies e considere a superfície $M_1 \# M_2 = \bigcup_{i=1}^2 M_i \setminus D_i / \sim$, onde \sim é a relação de equivalência dada por um difeomorfismo $f : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$. Calcule $\chi(M_1 \# M_2)$ em termos de $\chi(M_i)$, $i = 1, 2$.

Exercício 12.16. Mostrar que a soma conexa de qualquer superfície compacta com uma esfera não muda a topologia.

Exercício 12.17. Considere os campos de vetores $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dados por

$$F_1(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3) \quad \text{e} \quad F_2(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

1. Encontre os pontos estacionários de F_1 e F_2 e calcule os respectivos índices.
2. Para $i = 1, 2$, diga se existe algum campo de vetores \tilde{F} na esfera \mathbb{S}^2 com um único ponto estacionário p e tal que $\text{ind}(\tilde{F}, p) = \text{ind}(F_i, 0)$. Justifique a resposta.

Exercício 12.18. Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ uma aplicação de classe C^1 entre dois abertos de variedades. Dada qualquer 1-forma diferencial em \mathcal{V} , considere a 1-forma diferencial $f^*\alpha$ definida em \mathcal{U} por $(f^*\alpha)_x = \alpha_{f(x)} \circ Df(x)$. Mostre que

1. Se $\alpha = d\varphi$ para alguma função $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ então $f^*\alpha = d(\varphi \circ f)$.
2. Se α é exata então $f^*\alpha$ é exata e se α é fechada então $f^*\alpha$ é fechada.
3. $\int_{f \circ \gamma} \alpha = \int_{\gamma} f^*\alpha$ para qualquer curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$.

Exercício 12.19. Mostre que se a métrica riemanniana em $M = \mathbb{T}^2$ é tal que a curvatura é maior ou igual que zero em todo ponto então a curvatura é identicamente nula.

Exercício 12.20 (C). A equação diferencial $x' = x^2 - x^3$ é um modelo simples para a combustão de um fósforo. A variável x representa o raio da chama, que se supõe ser aproximadamente esférica. A equação significa que o crescimento da chama depende do saldo entre a quantidade de oxigênio disponível para ser queimado, que é proporcional à área da superfície externa, e a quantidade de oxigênio sendo efetivamente queimado, que é proporcional ao volume da chama.

Analise qualitativamente o comportamento das soluções. Resolva a equação diferencial numericamente, para condições iniciais $x(0) = x_0$ próximas de zero, por

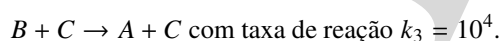
exemplo $x_0 = 0,01$, usando (a) o método RKF45 e (b) o método de Euler implícito. Represente os resultados graficamente. Compare o desempenho dos dois métodos, em termos do número de iterações e do tempo total de cálculo.

Exercício 12.21 (C). Use os métodos RKF45 e ode23s para integrar as soluções da equação diferencial $x' = -50(x - \cos t)$ para diferentes condições iniciais x_0 entre $1/2$ e $3/2$. Compare os desempenhos dos dois métodos. Represente as soluções graficamente.

Exercício 12.22 (C). Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} x' = -k_1 x + k_3 yz \\ y' = k_1 x - k_2 y^2 - k_3 yz \\ z' = k_2 y^2. \end{cases}$$

correspondente ao seguinte modelo de reação química:



Estude o comportamento das soluções com condição inicial (x_0, y_0, z_0) próxima de $(1, 0, 0)$, usando diferentes métodos de integração numérica.

12.7 Notas

O conceito de número de voltas de uma curva em torno de um ponto remonta à Análise Complexa, especialmente, ao Teorema dos Resíduos de Cauchy. O interesse de Poincaré nestes temas foi despertado por seu esforço para generalizar o Teorema dos Resíduos para dimensões superiores. Em *Sur les résidus des intégrales doubles* [97], Poincaré formulou o conceito de *integral de superfície* de forma adequada, caracterizando quando ela não depende da superfície de integração, apenas do respectivo bordo. Desta forma, redescobriu o Teorema de Stokes

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega,$$

que lhe permitiu obter o desejado teorema dos resíduos para funções analíticas com várias variáveis complexas. Este trabalho levou Poincaré a descobrir a homologia, em *Analysis situs* [102] e seus complementos, publicados entre 1899 e 1904, e influenciou decisivamente o trabalho de Alexander e De Rham sobre cohomologia.

Euler observou que o número $\chi(P) = F - V + A$ é igual a 2 para todos os poliedros convexos. Uma observação relacionada havia sido feita antes pelo matemático, cientista e filósofo francês René Descartes (1596–1650). Demonstrações alternativas do Teorema de Euler foram dadas ao longo do tempo por matemáticos do calibre de Legendre, Cauchy e Steiner (veja o Capítulo 1 do livro de Hopf [47] e também [30]). Apesar disso, a característica de Euler permaneceu como pouco mais que uma curiosidade até

o trabalho revolucionário de Poincaré [101], que permitiu compreender o verdadeiro sentido desse número e utilizá-lo como ponto de partida para generalizações notáveis.

A nossa apresentação na Seção 12.2 é parcialmente baseada nos livros de Munkres [77, 78] e Hopf [47]. Os Lemas 12.8 e 12.9 estão demonstrados em Munkres [77]. O Apêndice A.6 contém uma discussão muito mais geral do conceito de característica de Euler, inclusive em dimensões superiores.

A versão do Teorema 12.1 para superfícies foi demonstrada por Poincaré [101] em 1893. O enunciado geral, em dimensão arbitrária, foi provado por Heinz Hopf [46] em 1926. O teorema tem inúmeras aplicações, tais como a rigidez de ovaloides convexos no espaço euclidiano, estudada por Cohn-Vossen ([24, 47, 72]).

O alemão Heinz Hopf (1894–1971) é considerado um dos grandes matemáticos do século 20, tendo dado inúmeras contribuições fundamentais à Geometria e à Topologia. Hopf desenvolveu a maior parte da sua carreira em Berlim e na renomada ETH de Zurique, e foi Presidente da União Matemática Internacional de 1955 a 1958.

Gauss descobriu uma versão do Teorema de Gauss–Bonnet mas nunca publicou. Um caso especial foi publicado por Bonnet em 1848. O francês Pierre Ossian Bonnet (1819–1892) graduou-se como engenheiro mas optou por seguir a carreira da pesquisa e ensino, na École Polytechnique, na École Normale Supérieure e no Bureau des Longitudes, todos em Paris. Ele deu importantes contribuições à Geometria Diferencial, tais como a noção da curvatura geodésica, que o conduziu ao resultado que conhecemos como Teorema de Gauss–Bonnet.

O Teorema de Gauss–Bonnet admite a seguinte extensão para superfícies compactas com bordo:

$$\int_M K \, d\omega = 2\pi\chi(M) - \int_{\partial M} k_g \, ds, \quad (12.33)$$

onde k_g é a curvatura geodésica do bordo. Vale um resultado similar para subconjuntos de superfícies riemannianas limitados por curvas diferenciais por pedaços. Por exemplo, se T é um *triângulo geodésico* isto é, limitado por três segmentos de geodésica, então

$$\int_T K \, d\omega = 2\pi\chi(T) - \sum_{j=1}^3 \beta_j = \pi + \sum_{j=1}^3 \alpha_j,$$

onde α_1 , α_2 e α_3 são os ângulos internos nos vértices do triângulo e $\beta_j = \pi - \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$ são os ângulos externos. O matemático alemão Stephan Cohn-Vossen (1902–1936) mostrou que a desigualdade

$$\int_M K \, d\omega \leq 2\pi\chi(M)$$

vale para superfícies quaisquer, não necessariamente compactas. Em geral, a desigualdade é estrita: esse é o caso, por exemplo, para superfícies com bordo, pois a integral da curvatura geodésica k_g do bordo é necessariamente positiva. O Teorema de Gauss–Bonnet também foi generalizado para variedades riemannianas de qualquer dimensão, nos anos 1940, por Allendoerfer, Chern e Weil.

A equação diferencial no Exercício 12.20 é atribuída a Larry Shampine no artigo *Stiff differential equations* de Cleve Moler no website MathWorks. O artigo [141]

discute diversos problemas rígidos, incluindo o modelo no Exercício 12.22. O ciclo de Chapman foi proposto em 1930 pelo matemático e geofísico britânico Sydney Chapman (1888-1970).

DRAFT