

Capítulo 10

Teorema da Variedade Estável

Neste capítulo vamos enunciar e demonstrar outro teorema fundamental da teoria local das equações diferenciais, chamado Teorema da Variedade Estável, o qual caracteriza o conjunto dos pontos cujas trajetórias convergem para um ponto estacionário hiperbólico dado, no futuro (quando $t \rightarrow +\infty$) ou no passado (quando $t \rightarrow -\infty$). Para simplificar a exposição, suporemos que o fluxo é completo.

Chamamos *variedade estável* e *variedade instável* de um ponto estacionário p , respectivamente, os conjuntos:

$$\begin{aligned} W^s(p) &= W^s(p, F) = \{x : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = p\} \quad \text{e} \\ W^u(p) &= W^u(p, F) = \{x : \lim_{t \rightarrow -\infty} f^t(x) = p\}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Em geral, estes conjuntos podem ser muito complicados. Mas, como veremos na Seção 10.1, segue do Teorema de Grobman–Hartman que se o ponto estacionário p é hiperbólico então eles são cópias *topologicamente imersas* dos subespaços E^s e E^u , respectivamente. Mais precisamente, $W^s(p)$ é a imagem de E^s por alguma aplicação contínua injetiva e, analogamente, $W^u(p)$ é a imagem de E^u por alguma aplicação contínua injetiva.

O Teorema da Variedade Estável (Teorema 10.2) afirma que, na verdade, $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são cópias *diferenciavelmente imersas* dos subespaços E^s e E^u , respectivamente: dado qualquer $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se o campo de vetores é de classe C^k então as aplicações referidas no parágrafo anterior podem ser tomadas de classe C^k . Também vale um resultado análogo para pontos fixos hiperbólicos de difeomorfismos, que enunciaremos no Teorema 10.2. A demonstração destes resultados ocupa a Seção 10.3.

Posteriormente, na Seção 10.4, introduziremos a noção de *trajetória periódica hiperbólica* de um fluxo e apresentaremos uma versão do Teorema da Variedade Estável para tais trajetórias.

10.1 Variedades estáveis e instáveis locais

Como vimos no Capítulo 9, se $p \in \mathcal{U}$ é um ponto estacionário hiperbólico de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 então existe um homeomorfismo $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ entre uma vizinhança \mathcal{V} do ponto p e uma vizinhança \mathcal{W} da origem, enviando p em 0 e conjugando o fluxo de F restrito a \mathcal{V} ao fluxo de $A = DF(p)$ restrito a \mathcal{W} .

Como o campo de vetores linear A é hiperbólico, existe uma decomposição $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ do espaço como soma direta de dois subespaços vetoriais invariantes por A ,

$$A(E^s) \subset E^s \quad \text{e} \quad A(E^u) \subset E^u,$$

e tais que todos os valores característicos de $A|_{E^s}$ têm parte real negativa e todos os valores característicos de $A|_{E^u}$ têm parte real positiva. Então, E^s e E^u também são invariantes pelo fluxo de A ,

$$e^{tA}(E^s) \subset E^s \quad \text{e} \quad e^{-tA}(E^u) \subset E^u \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

e satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}(v) = 0 \quad \text{se e somente se } v \in E^s \quad \text{e}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA}(v) = 0 \quad \text{se e somente se } v \in E^u.$$

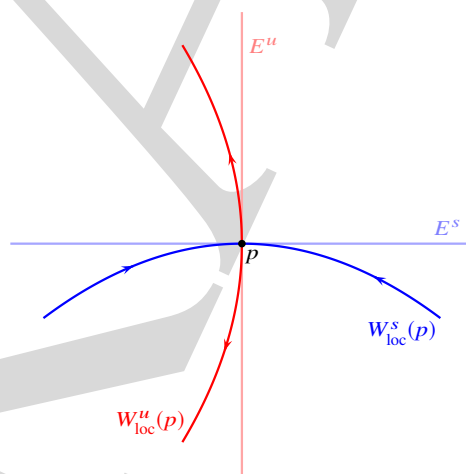


Figura 10.1: Variedade estável local e variedade instável local.

Chamaremos *variedade estável local* e *variedade instável local* do ponto estacionário p , respectivamente, os seguintes conjuntos (veja a Figura 10.1):

$$W_{\text{loc}}^s(p) = W_{\text{loc}}^s(p, F) = H^{-1}(\mathcal{W} \cap E^s) \quad \text{e} \quad (10.2)$$

$$W_{\text{loc}}^u(p) = W_{\text{loc}}^u(p, F) = H^{-1}(\mathcal{W} \cap E^u).$$

Claro que estes conjuntos não estão unicamente definidos: a definição (10.2) depende da escolha da conjugação $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ no Teorema 9.7, inclusive das escolhas de \mathcal{V} e de \mathcal{W} .

É sempre possível fazer essas escolhas de tal forma que

- (A) $f^t(W_{\text{loc}}^s(p)) \subset W_{\text{loc}}^s(p)$ para todo $t > 0$;
- (B) $f^t(x) \in \mathcal{V}$ para todo $t > 0$ se e somente se $x \in W_{\text{loc}}^s(p)$;
- (C) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = 0$ se e somente se existe $s > 0$ tal que $f^s(x) \in W_{\text{loc}}^s(p)$;
- (D) valem propriedades análogas para $W_{\text{loc}}^u(p)$, com f^{-t} no lugar de f^t .

Por exemplo (Exercício 10.8), esse é o caso se \mathcal{W} tem a forma

$$\mathcal{W} = \{x_s + x_u \in E^s \oplus E^u : \|x_s\| < \rho_s \text{ e } \|x_u\| < \rho_u\},$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma *adaptada* a e^A .

Pela definição (10.2), a variedade estável local e a variedade instável local são discos *topologicamente mergulhados* em \mathcal{U} : mais precisamente, elas são imagens homeomórficas de bolas de E^s e E^u , respectivamente. As propriedades (A) a (D) acima implicam que

$$W^s(p) = \bigcup_{s>0} f^{-s}(W_{\text{loc}}^s(p)) \quad \text{e} \quad W^u(p) = \bigcup_{s>0} f^s(W_{\text{loc}}^u(p)) \quad (10.3)$$

e estas uniões são monótonas não decrescentes. Segue que a variedade estável e a variedade instável (globais) são cópias *topologicamente imersas* de E^s e E^u , respectivamente, ou seja, que existem aplicações contínuas injetivas

$$\phi^s : E^s \rightarrow \mathcal{U} \quad \text{e} \quad \phi^u : E^u \rightarrow \mathcal{U}$$

tais que $\phi^s(E^s) = W^s(p)$ e $\phi^u(E^u) = W^u(p)$. Tais aplicações podem ser definidas da seguinte forma, por exemplo:

$$\phi^s(v_s) = f^{-t_s}(H^{-1}(e^{t_s A} v_s)) \quad \text{e} \quad \phi^u(v_u) = f^{t_u}(H^{-1}(e^{-t_u A} v_u)) \quad (10.4)$$

para quaisquer $t_s > 0$ e $t_u > 0$ tais que $e^{t_s A} v_s$ e $e^{-t_u A} v_u$ estão em \mathcal{W} . Como H conjugua os fluxos $(f^t)_t$ e $(e^{tA})_t$, a definição não depende da escolha de t_s e t_u . Deixamos ao cuidado do leitor verificar estas afirmações (Exercício 10.2).

Observação 10.1. Em geral a variedade estável e a variedade instável *não estão* mergulhadas em \mathcal{U} . De fato, já encontramos uma tal situação, no Exemplo 9.9 (veja a Figura 9.2): a variedade estável do ponto $p = (0, 0)$ contém uma curva fechada passando por p e, portanto, não pode ser homeomorfa a $E^s \simeq \mathbb{R}$; o mesmo vale para a variedade instável de p .

10.2 Teorema da Variedade Estável

O Teorema da Variedade Estável, que enunciaremos formalmente a seguir, afirma que na verdade a variedade estável local e a variedade instável local de um ponto estacionário hiperbólico são discos *diferenciavelmente mergulhados* em \mathcal{U} . Segue que a variedade estável $W^s(p)$ e a variedade instável $W^u(p)$ são cópias *diferenciavelmente imersas* de E^s e E^u , respectivamente. Além disso, o espaço tangente à variedade estável local no ponto p é o próprio E^s e, analogamente, o espaço tangente à variedade instável local no ponto p é o próprio E^u .

Teorema 10.2 (Teorema da Variedade Estável para pontos estacionários de fluxos). *Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$, e seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto estacionário hiperbólico. Então existe um mergulho $\phi : V \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^k , definido em uma vizinhança $V \subset E^s$ da origem, tal que*

- (a) $\phi(0) = p$ e $\phi(V)$ coincide com uma variedade estável local $W_{\text{loc}}^s(p)$ de p ;
- (b) $D\phi(0)E^s = E^s$ (portanto, $W_{\text{loc}}^s(p)$ é tangente a E^s no ponto p);
- (c) ϕ se estende a uma imersão injetiva $\phi : E^s \rightarrow \mathcal{U}$, de classe C^k , cuja imagem é $W^s(p)$.

Valem fatos análogos para a variedade instável, substituindo $(f^t)_t$ e E^s por $(f^{-t})_t$ e E^u respectivamente.

Vamos deduzir este teorema de um resultado análogo para pontos fixos hiperbólicos de difeomorfismos, que enunciaremos a seguir e que será provado na Seção 10.3. Chamamos *variedade estável* e *variedade instável* de um ponto fixo $p \in \mathcal{U}$ de um difeomorfismo $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, respectivamente, os conjuntos

$$\begin{aligned} W^s(p) &= W^s(p, f) = \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p\} \\ W^u(p) &= W^u(p, f) = \{x : \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = p\}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Se o ponto fixo é hiperbólico, também chamamos *variedade estável local* e *variedade instável local*, respectivamente, os conjuntos:

$$\begin{aligned} W_{\text{loc}}^s(p) &= W_{\text{loc}}^s(p, f) = h^{-1}(\mathcal{W} \cap E^s) \quad \text{e} \\ W_{\text{loc}}^u(p) &= W_{\text{loc}}^u(p, f) = h^{-1}(\mathcal{W} \cap E^u), \end{aligned} \quad (10.6)$$

onde $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ é uma conjugação local de f à transformação linear $B = Df(0)$ dada pelo Teorema 9.16. A discussão na seção anterior estende-se imediatamente para este contexto. Em particular, contanto que a conjugação $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ seja escolhido convenientemente, temos que

- (A) $f(W_{\text{loc}}^s(p)) \subset W_{\text{loc}}^s(p)$;
- (B) $f^n(x) \in \mathcal{V}$ para todo $n \geq 0$ se e somente se $x \in W_{\text{loc}}^s(p)$;
- (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$ se e somente se existe $k \geq 0$ tal que $f^k(x) \in W_{\text{loc}}^s(p)$;

(D) valem propriedades análogas para $W_{\text{loc}}^u(p)$, com f^{-1} no lugar de f .

Além disso, segue que

$$W^s(p) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(W_{\text{loc}}^s(p)) \quad \text{e} \quad W^u(p) = \bigcup_{k \geq 0} f^k(W_{\text{loc}}^u(p)) \quad (10.7)$$

e estas uniões são monótonas não decrescentes.

Teorema 10.3 (Teorema da Variedade Estável para pontos fixos de difeomorfismos). *Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ um difeomorfismo de C^k , com $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, e seja $p \in \mathcal{U}$ um ponto fixo hiperbólico. Então existe um mergulho $\phi : V \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^k , definido em uma vizinhança $V \subset E^s$ da origem, tal que*

- (a) $\phi(0) = p$ e $\phi(V)$ é uma variedade estável local $W_{\text{loc}}^s(p)$ de p ;
- (b) $D\phi(0)E^s = E^s$ (portanto, $W_{\text{loc}}^s(p)$ é tangente a E^s no ponto p);
- (c) ϕ se estende a uma imersão injetiva $\phi : E^s \rightarrow \mathcal{U}$, de classe C^k , cuja imagem é $W^s(p)$.

Valem fatos análogos para a variedade instável, substituindo f por f^{-1} e E^s por E^u .

Para deduzir o Teorema 10.2 do Teorema 10.3, seja $f = f^1$ a transformação tempo-1 do campo de vetores F . Pelo Corolário 9.6, o ponto estacionário hiperbólico p de F é um ponto fixo hiperbólico de f . Seja $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ uma conjugação de f à aplicação linear $B = e^{Df(0)}$, dada pelo Teorema 9.16. Como vimos ao final da Seção 9.3.3, o homeomorfismo $H = h$ também conjugua o fluxo de F ao fluxo do campo de vetores linear A . Então,

$$W_{\text{loc}}^s(p, F) = H^{-1}(\mathcal{W} \cap E^s) = h^{-1}(\mathcal{W} \cap E^s) = W_{\text{loc}}^s(p, f) \quad \text{e} \quad W_{\text{loc}}^u(p, F) = W_{\text{loc}}^u(p, f).$$

Usando (10.3) e (10.7), concluímos que

$$W^s(p, F) = W^s(p, f) \quad \text{e} \quad W^u(p, F) = W^u(p, f).$$

Portanto, o Teorema 10.2 está contido no Teorema 10.3.

10.3 Demonstração do Teorema da Variedade Estável

Nesta seção demonstraremos o Teorema 10.3. Denotaremos $E = \mathbb{R}^d$, observando que todos os argumentos se estendem facilmente para qualquer espaço de Banach. Começemos por fazer um breve resumo da demonstração.

Tal como na demonstração do Teorema de Grobman–Hartman, o primeiro passo é globalizar a dinâmica. A menos de conjugar f com uma translação, podemos supor que $p = 0$. Seja $B = Df(0)$. Então, pelo Lemma 9.17, dado qualquer $\delta > 0$ existe $r > 0$ e um difeomorfismo $g : E \rightarrow E$ de classe C^k tal que

1. $g \equiv f^{-1}$ em $B_r(0)$ e $g \equiv B^{-1}$ em $E \setminus B_{2r}(0)$ e $\|g - B^{-1}\|_0 \leq \delta$.

2. a diferença $g - B^{-1}$ é δ -lipschitziana.

Sejam $x = (x_s, x_u)$ as coordenadas em E dadas pela identificação de $E = E^s \oplus E^u$ com o produto cartesiano $E^s \times E^u$. Vamos buscar uma função contínua $\alpha_0 : E^s \rightarrow E^u$ cujo gráfico

$$\text{graf } \alpha_0 = \{(x_s, x_u) \in E^s \times E^u : x_u = \alpha_0(x_s)\}$$

seja invariante por g , ou seja, tal que

$$g(\text{graf } \alpha_0) = \text{graf } \alpha_0.$$

Inicialmente, usando o Teorema do Ponto Fixo para Contrações (Teorema 2.10), mostraremos que tal função existe.

A parte principal do argumento será mostrar que α_0 é diferenciável: se g é de classe C^k então α_0 também é de classe C^k . Isto estará baseado em uma versão mais elaborada do Teorema do Ponto Fixo, que apresentaremos no Teorema 10.9.

Ao final, verificaremos que $\text{graf } \alpha_0$ coincide com a variedade instável de $p = 0$ relativamente ao difeomorfismo g e, usando o fato de que g coincide com f^{-1} na vizinhança da origem, deduziremos as afirmações no teorema.

10.3.1 Transformação de gráfico

A função $\alpha_0 : E^s \rightarrow E^u$ será obtida como o ponto fixo de uma certa aplicação, denominada *transformação de gráfico*, que vamos definir em seguida.

Denotemos $B_s = B|_{E^s}$ e $B_u = B|_{E^u}$. Consideremos o espaço E munido de uma norma adaptada a B , de tal modo que

$$\|B_s\| \leq \lambda < 1 \quad \text{e} \quad \|B_u^{-1}\| \leq \lambda < 1.$$

Então podemos escrever $g : E \rightarrow E$ da seguinte forma:

$$g(y_s, y_u) = (B_s^{-1}y_s + \varphi_s(y_s, y_u), B_u^{-1}y_u + \varphi_u(y_s, y_u)),$$

onde φ_s e φ_u são funções limitadas e δ -lipschitzianas. Ao longo do argumento suporemos que $\delta > 0$ é suficientemente pequeno para que

$$\max \left\{ 2\delta\lambda, \frac{\lambda + \delta}{1 - 2\delta\lambda}, \delta\|B_s^{-1}\|, (\lambda + \delta) \left(\frac{\delta\|B_s^{-1}\|}{1 - \delta\|B_s^{-1}\|} + 1 \right) \right\} < 1. \quad (10.8)$$

Em particular, isto implica que $\lambda + \delta < 1$ e $\frac{\lambda}{1 - \delta\lambda} < 1$.

Lema 10.4. *Dada qualquer função lipschitziana $\alpha : E^s \rightarrow E^u$ com constante de Lipschitz 1, existe uma única função $\gamma : E^s \rightarrow E^u$ tal que*

$$\text{graf } \gamma = g(\text{graf } \alpha).$$

A função γ é lipschitziana, com constante de Lipschitz 1. Além disso, se α é limitada então γ é limitada.

Demonstração. Dada α como no enunciado e dado qualquer $y_s \in E$,

$$g(y_s, \alpha(y_s)) = (B_s^{-1}y_s + \varphi_s(y_s, \alpha(y_s)), B_u^{-1}\alpha(y_s) + \varphi_u(y_s, \alpha(y_s))). \quad (10.9)$$

A aplicação $y_s \mapsto (y_s, \alpha(y_s))$ é lipschitziana com constante de Lipschitz 1. Portanto,

$$y_s \mapsto \varphi_s(y_s, \alpha(y_s)) \quad (10.10)$$

é δ -lipschitziana. Como $\delta < 1 < \lambda^{-1} \leq \|B_s\|^{-1}$, segue do Corolário 9.12 que a aplicação

$$y_s \mapsto B_s^{-1}y_s + \varphi_s(y_s, \alpha(y_s))$$

é um difeomorfismo de classe C^k . Seja $x_s \mapsto y_s = \psi_\alpha(x_s)$ a sua inversa. Também segue do corolário que ψ_α é lipschitziana, com constante de Lipschitz

$$\frac{\|B_s\|}{1 - \delta\|B_s\|} \leq \frac{\lambda}{1 - \delta\lambda} < 1. \quad (10.11)$$

Agora defina (veja a Figura 10.2)

$$\gamma(x_s) = B_u^{-1}\alpha(\psi_\alpha(x_s)) + \varphi_u(\psi_\alpha(x_s), \alpha(\psi_\alpha(x_s))). \quad (10.12)$$

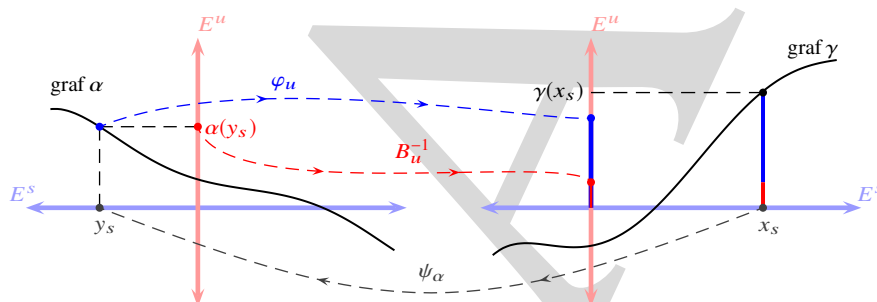


Figura 10.2: Transformação de gráfico.

Por um lado, de acordo com (10.9),

$$g(y_s, \alpha(y_s)) = (x_s, \gamma(x_s)) \text{ para } y_s = \psi_\alpha(x_s). \quad (10.13)$$

Isto significa que $g(\text{graf } \alpha) = \text{graf } \gamma$. É claro que γ é única com esta propriedade (Exercício 10.5). Por outro lado, segue da definição (10.12) que γ é lipschitziana, com constante de Lipschitz

$$\|B_u^{-1}\| \frac{\lambda}{1 - \delta\lambda} + \delta \frac{\lambda}{1 - \delta\lambda} \leq \frac{\lambda(\lambda + \delta)}{1 - \delta\lambda} < 1.$$

Finalmente, a definição (10.12) também implica que

$$\|\gamma(x_s)\| \leq \|B_u^{-1}\| \|\alpha(\psi_\alpha(x_s))\| + \|\varphi_u(\psi_\alpha(x_s), \alpha(\psi_\alpha(x_s)))\| \leq \|B_u^{-1}\| \|\alpha(\psi_\alpha(x_s))\| + \delta$$

Portanto, γ é limitada se α é limitada. \square

Seja \mathcal{B}_0 o conjunto das aplicações $\alpha : E^s \rightarrow E^u$ limitadas e 1-lipschitzianas. De acordo com o Lema 10.4, temos uma transformação

$$T_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0 \text{ tal que } \text{graf}(T_0(\alpha)) = g(\text{graf } \alpha) \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{B}_0.$$

Ela é chamada *transformação de gráfico* associada a g . Considere em \mathcal{B}_0 a distância $\|\cdot\|_0$ definida por

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_0 = \sup\{\|\alpha_1(x_s) - \alpha_2(x_s)\| : x_s \in E^s\}. \quad (10.14)$$

Convidamos o leitor a verificar que esta distância é completa (Exercício 10.4).

Lema 10.5. *A transformação de gráfico $T_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ é uma contração relativamente à distância $\|\cdot\|_0$.*

Demonstração. Considere $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{B}_0$ e seja $\gamma_i = T_0(\alpha_i)$ para $i = 1, 2$. Além disso, para cada $i = 1, 2$, seja $\psi_i = \psi_{\alpha_i}$ a inversa da aplicação

$$y_s \mapsto B_s^{-1}y_s + \varphi_s(y_s, \alpha_i(y_s)).$$

Pela definição (10.12), usando também o fato de que φ_s é δ -lipschitziana,

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(x_s) - \gamma_2(x_s)\| &= \|B_u^{-1}\alpha_1(\psi_1(x_s)) + \varphi_u(\psi_1(x_s), \alpha_1(\psi_1(x_s))) \\ &\quad - B_u^{-1}\alpha_2(\psi_2(x_s)) - \varphi_u(\psi_2(x_s), \alpha_2(\psi_2(x_s)))\| \\ &\leq \|B_u^{-1}\| \|\alpha_1(\psi_1(x_s)) - \alpha_2(\psi_2(x_s))\| \\ &\quad + \delta \max\{\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\|, \|\alpha_1(\psi_1(x_s)) - \alpha_2(\psi_2(x_s))\|\}. \end{aligned}$$

Como as funções α_i são lipschitzianas, com constante de Lipschitz 1,

$$\begin{aligned} \|\alpha_1(\psi_1(x_s)) - \alpha_2(\psi_2(x_s))\| &\leq \|\alpha_1(\psi_1(x_s)) - \alpha_1(\psi_2(x_s))\| \\ &\quad + \|\alpha_1(\psi_2(x_s)) - \alpha_2(\psi_2(x_s))\| \\ &\leq \|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_0. \end{aligned}$$

Combinando estas duas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(x_s) - \gamma_2(x_s)\| &\leq (\|B_u^{-1}\| + \delta)(\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_0) \\ &\leq (\lambda + \delta)(\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_0) \end{aligned} \quad (10.15)$$

Agora, por definição,

$$B_s^{-1}\psi_1(x_s) + \varphi_s(\psi_1(x_s), \alpha_1(\psi_1(x_s))) = x_s = B_s^{-1}\psi_2(x_s) + \varphi_s(\psi_2(x_s), \alpha_2(\psi_2(x_s))).$$

Isto implica que

$$\|B_s^{-1}\psi_1(x_s) - B_s^{-1}\psi_2(x_s)\| = \|\varphi_s(\psi_2(x_s), \alpha_2(\psi_2(x_s))) - \varphi_s(\psi_1(x_s), \alpha_1(\psi_1(x_s)))\|$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \|B_s^{-1}\|^{-1}\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\| &\leq \delta \max\{\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\|, \|\alpha_1(\psi_1(x_s)) - \alpha_2(\psi_2(x_s))\|\} \\ &\leq \delta(\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_0). \end{aligned}$$

Lembre que $\delta\|B_s^{-1}\| < 1$. Então esta última desigualdade significa que

$$\|\psi_1(x_s) - \psi_2(x_s)\| \leq \frac{\delta\|B_s^{-1}\|}{1 - \delta\|B_s^{-1}\|} \|\alpha_1 - \alpha_2\|_0.$$

Fixe qualquer $\lambda_0 \in (\lambda, 1)$. Usando este fato em (10.15) vem que

$$\|T_0(\alpha_1) - T_0(\alpha_2)\|_0 = \|\gamma_1(x_s) - \gamma_2(x_s)\| \leq (\lambda + \delta) \left(\frac{\delta\|B_s^{-1}\|}{1 - \delta\|B_s^{-1}\|} + 1 \right) \|\alpha_1 - \alpha_2\|_0.$$

para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{B}_0$. A condição (10.8) garante que o fator do lado direito é menor que 1. Portanto, ficou provado que T_0 é uma contração. \square

Corolário 10.6. *Existe um único $\alpha_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $T_0(\alpha_0) = \alpha_0$ e, conseqüentemente,*

$$\text{graf}(\alpha_0) = g(\text{graf } \alpha_0).$$

Além disso, $T_0^n(\alpha)$ converge uniformemente para α_0 , qualquer que seja $\alpha \in \mathcal{B}_0$.

Demonstração. É consequência imediata do Lema 10.5 e do Teorema do Ponto Fixo para Contrações (Teorema 2.10). \square

10.3.2 Diferenciabilidade C^1

Em seguida, vamos mostrar que a função $\alpha_0 : E^s \rightarrow E^u$ que construímos na seção anterior é de classe C^1 .

Designemos por $\mathcal{L}(E^s, E^u)$ o espaço das aplicações lineares de E^s em E^u , munido da norma de operador

$$\|A\| = \sup\{\|Av\| : \|v\| = 1\}$$

Vamos considerar o espaço \mathcal{B}_1 das duplas (α, A) onde

- $\alpha : E^s \rightarrow E^u$ é limitada e lipschitziana, com constante de Lipschitz 1 (ou seja $\alpha \in \mathcal{B}_0$) e
- $A : E^s \rightarrow \mathcal{L}(E^s, E^u)$ é limitada.

Consideramos neste espaço a distância definida por

$$\|(\alpha_1, A_1) - (\alpha_2, A_2)\|_1 = \max\{\|\alpha_1 - \alpha_2\|_0, \|A_1 - A_2\|_0\},$$

onde $\|\alpha_1 - \alpha_2\|_0$ está dado por (10.14) e, analogamente,

$$\|A_1 - A_2\|_0 = \sup\{\|A_1(x_s) - A_2(x_s)\| : x_s \in E^s\}.$$

Convidamos o leitor a verificar que esta distância é completa (Exercício 10.4).

Estendemos a transformação de gráfico a este espaço, da seguinte forma: consideramos

$$T_1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1, \quad (\alpha, A) \mapsto (\gamma, \Gamma) \tag{10.16}$$

definida por

- $\gamma = T_0(\alpha)$, ou seja $\gamma : E^s \rightarrow E^u$ dada por

$$\gamma(x_s) = B_u^{-1} \alpha(\psi_\alpha(x_s)) + \varphi_u(\psi_\alpha(x_s), \alpha(\psi_\alpha(x_s))) \quad (10.17)$$

onde $\psi_\alpha : E^s \rightarrow E^s$ é a inversa da aplicação $y_s \mapsto B_s^{-1} y_s + \varphi_s(y_s, \alpha(y_s))$;

- $\Gamma : E^s \rightarrow \mathcal{L}(E^s, E^u)$ dada por

$$\Gamma(x_s) = B_u^{-1} A(\psi_\alpha(x_s)) D\psi_\alpha(x_s) + \partial_{x_s} \varphi_u(\psi_\alpha(x_s), \alpha(\psi_\alpha(x_s))) D\psi_\alpha(x_s) + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha(x_s), \alpha(\psi_\alpha(x_s))) A(\psi_\alpha(x_s)) D\psi_\alpha(x_s). \quad (10.18)$$

Lembre que $\varphi_s \equiv 0 \equiv \varphi_u$ fora da bola $B_{2r}(0)$. Isto implica que $D\varphi_s \equiv 0 \equiv D\varphi_u$ e também que $D\psi_\alpha \equiv B_s$ fora de algum compacto. Em particular, estas três funções são limitadas. Isto garante que Γ é limitada se A é limitada. Portanto, a transformação T_1 está bem definida em \mathcal{B}_1 .

As propriedades fundamentais desta transformação estão traduzidas nos dois lemas a seguir. A primeira delas é que T_1 “comuta” com a derivação:

Lema 10.7. *Se $\alpha \in \mathcal{B}_0$ é de classe C^1 então $T_0(\alpha)$ é de classe C^1 . Além disso, se a derivada $D\alpha$ é limitada então $DT_0(\alpha)$ é limitada e*

$$T_1(\alpha, D\alpha) = (T_0(\alpha), DT_0(\alpha)).$$

Demonstração. Seja $\gamma = T_0(\alpha)$. A primeira afirmação segue diretamente da regra da cadeia: se α é derivável então

$$D\gamma = B_u^{-1} (D\alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha + \partial_{x_s} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) (D\alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha. \quad (10.19)$$

Como vimos anteriormente, $D\varphi_s$, $D\varphi_u$ e $D\psi_\alpha$ são limitadas. Logo, $D\gamma$ é limitada se $D\alpha$ é limitada. Para obter a última afirmação no enunciado basta comparar as igualdades (10.18) e (10.19). \square

A segunda propriedade importante de T_1 é que ela é uma *contração nas fibras*. Começemos por definir esta noção. Sejam X e Y dois conjuntos. Dizemos que uma aplicação $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$ é um *produto semidireto* se a primeira coordenada da imagem depende apenas da primeira coordenada da variável, ou seja, se T tem a forma

$$T(x, y) = (\tau(x), T_x(y)).$$

para alguma transformação $\tau : X \rightarrow X$ e alguma família de transformações $T_x : Y \rightarrow Y$, $x \in X$.

Agora sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois espaços métricos. Considere o produto cartesiano $X \times Y$ munido da distância

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}. \quad (10.20)$$

Dizemos que um produto semidireto $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$, $T(x, y) = (\tau(x), T_x(y))$ é uma *contração nas fibras* relativamente à distância d se a aplicação $x \mapsto T_x(y)$ é contínua para todo $y \in Y$ e existe $\theta < 1$ tal que

$$d_Y(T_x(y_1), T_x(y_2)) \leq \theta d_Y(y_1, y_2) \text{ para todo } x \in X \text{ e quaisquer } y_1, y_2 \in Y. \quad (10.21)$$

Lema 10.8. A transformação $T_1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$ é uma contração nas fibras relativamente à distância $\| \cdot \|_1$.

Demonstração. É claro que T_1 é um produto semidireto: pela definição (10.17), a função γ depende apenas da variável α . Também é claro que a aplicação

$\alpha \mapsto \Gamma = B_u^{-1}(A \circ \psi_\alpha)D\psi_\alpha + \partial_{x_s} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)D\psi_\alpha + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)(A \circ \psi_\alpha)D\psi_\alpha$
(confira (10.18)) é contínua, qualquer que seja A . Resta verificar a condição (10.21).

Para isso, fixemos α e consideremos duas aplicações limitadas $A_1, A_2 : E \rightarrow \mathcal{L}(E^s, E^u)$ quaisquer. Temos que $T_1(\alpha, A_i) = (\gamma, \Gamma_i)$ para $i = 1, 2$ com

$$\Gamma_i = B_u^{-1}(A_i \circ \psi_\alpha)D\psi_\alpha + \partial_{x_s} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)D\psi_\alpha + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)(A_i \circ \psi_\alpha)D\psi_\alpha.$$

Então,

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 = \left(B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) \right) \left((A_1 - A_2) \circ \psi_\alpha \right) D\psi_\alpha.$$

Pelo Lema 9.17, temos que $\|D\varphi_u\|_0 \leq \delta$ e $\|D(\psi_\alpha - B_s)\|_0 \leq \delta$. Logo, usando também o fato de que $\|B_u^{-1}\| \leq \lambda$ e $\|B_s\| \leq \lambda$,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 - \Gamma_2\|_0 &\leq \left(\|B_u^{-1}\| + \|\partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)\|_0 \right) \|(A_1 - A_2) \circ \psi_\alpha\|_0 \|D\psi_\alpha\|_0 \\ &\leq (\lambda + \delta) \|(A_1 - A_2) \circ \psi_\alpha\|_0 (\lambda + \delta) \leq (\lambda + \delta)^2 \|A_1 - A_2\|_0. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação, com $\theta = (\lambda + \delta)^2$. \square

Este lema possibilita usar a seguinte extensão do Teorema 2.10:

Teorema 10.9 (Teorema do Ponto Fixo para Contrações nas Fibras). *Seja $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$, $T(x, y) = (\tau(x), T_x(y))$ uma contração nas fibras relativamente à distância (10.20). Suponha que o espaço métrico Y é completo e que existe $x_0 \in X$ tal que $\tau(x_0) = x_0$ e $\tau^n(x)$ converge para x_0 quando $n \rightarrow \infty$, qualquer que seja $x \in X$. Então, existe $y_0 \in Y$ tal que $T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ e $T^n(x, y)$ converge para (x_0, y_0) quando $n \rightarrow \infty$, qualquer que seja $(x, y) \in X \times Y$. Em particular, (x_0, y_0) é o único ponto fixo de T .*

Demonstração. A hipótese implica que $T_{x_0} : Y \rightarrow Y$ é uma contração. Como supomos que Y é completo, o Teorema 2.10 garante que existe um único $y_0 \in Y$ tal que $T_{x_0}(y_0) = y_0$. É imediato que $T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. Portanto, só resta mostrar que $T^n(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Represente $(x_n, y_n) = T^n(x, y)$ para cada $n \geq 0$. Como sabemos que $x_n = \tau^n(x)$ converge para x_0 , basta mostrar que y_n converge para y_0 . Observe que

$$\begin{aligned} d_Y(y_{j+1}, y_0) &= d_Y(T_{x_j}(y), y_0) \leq d_Y(T_{x_j}(y), T_{x_j}(y_0)) + d_Y(T_{x_j}(y_0), y_0) \\ &\leq \theta d_Y(y_j, y_0) + d_Y(T_{x_j}(y_0), y_0) \end{aligned}$$

para todo $j \geq 0$. Portanto, para todo $n \geq 1$,

$$d_Y(y_n, y_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^{n-1-j} d_Y(T_{x_j}(y_0), y_0). \quad (10.22)$$

Como $(x_j)_j$ converge para x_0 e a aplicação $x \mapsto T_x(y)$ é contínua, a sequência

$$d_Y(T_{x_j}(y_0), y_0) = d_Y(T_{x_j}(y_0), T_{x_0}(y_0))$$

converge para 0. Consequentemente (Exercício 10.3), o lado direito da desigualdade (10.22) converge para zero. Isto prova a nossa afirmação. \square

Estamos prontos para mostrar que o ponto fixo α_0 da transformação T_0 , construído na seção anterior, é de classe C^1 . Para isso, considere qualquer elemento de \mathcal{B}_1 da forma $(\alpha, D\alpha)$: por exemplo, podemos tomar para α a função identicamente nula. Pelo Lema 10.7,

$$T_1^n(\alpha, D\alpha) = (T_0^n(\alpha), DT_0^n(\alpha)) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Além disso, pelo Lema 10.8 combinado com o Teorema 10.9, esta sequência converge para o ponto fixo (α_0, A_0) de T_1 . Isto significa que $T_0^n(\alpha)$ converge uniformemente para α_0 e $DT_0^n(\alpha)$ converge uniformemente para A_0 . Então (Exercício 10.6), a função α_0 é derivável com $D\alpha_0 = A_0$. Isto conclui o argumento no caso $k = 1$.

10.3.3 Diferenciabilidade C^k

Agora o objetivo é mostrar que o ponto fixo α_0 é de classe C^k se o difeomorfismo g é de classe C^k , qualquer que seja $k \geq 1$. Argumentaremos por indução em k .

Para cada $q \geq 1$, designe por $\mathcal{L}^q(E^s, E^u)$ o espaço das aplicações q -lineares $A^q : E^s \times \cdots \times E^s \rightarrow E^u$, munido da *norma de operador*

$$\|A^q\| = \sup\{A^q(v_1, \dots, v_q) : \|v_i\| \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, q\} \quad (10.23)$$

Vamos considerar o espaço \mathcal{B}_k das $(k+1)$ -uplas $(\alpha, A^1, \dots, A^k)$ onde

- $\alpha : E^s \rightarrow E^u$ é limitada e lipschitziana, com constante de Lipschitz 1 (ou seja $\alpha \in \mathcal{B}_0$) e
- $A^q : E^s \rightarrow \mathcal{L}^q(E^s, E^u)$ é aplicação limitada, para cada $q = 1, \dots, k$.

Consideramos neste espaço a distância definida por

$$\begin{aligned} \|(\alpha_1, A_1^1, \dots, A_1^k) - (\alpha_2, A_2^1, \dots, A_2^k)\|_k \\ = \max\{\|\alpha_1 - \alpha_2\|_0, \|A_1^1 - A_2^1\|_0, \dots, \|A_1^k - A_2^k\|_0\}, \end{aligned} \quad (10.24)$$

onde $\|\alpha_1 - \alpha_2\|_0$ está dado por (10.14) e

$$\|A_1^q - A_2^q\|_0 = \sup\{\|A_1^q(x_s) - A_2^q(x_s)\| : x_s \in E^s\} \text{ para } q = 1, \dots, k.$$

Convidamos o leitor a verificar que esta distância é completa (Exercício 10.4).

Por indução, suponhamos que já construímos uma transformação $T_k : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$,

$$T_k : (\alpha, A^1, \dots, A^k) \mapsto (\gamma, \Gamma^1, \dots, \Gamma^k)$$

satisfazendo (recorde os Lemas 10.7 e 10.8 e o Teorema 10.9):

- $\gamma = T_0(\alpha)$ e $T_k(\alpha, D\alpha, \dots, D^k\alpha) = (\gamma, D\gamma, \dots, D^k\gamma)$ sempre que α é de classe C^k e as suas derivadas até a ordem k são limitadas;
- existe $(\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k)$ tal que $T_k(\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k) = (\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k)$ e os iterados $T_k^n(\alpha, A^1, \dots, A^k)$ de todo ponto convergem para $(\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Supondo que o difeomorfismo f é de classe C^{k+1} , vamos construir uma aplicação $T_{k+1} : \mathcal{B}_{k+1} \rightarrow \mathcal{B}_{k+1}$ com as propriedades análogas para $k+1$. Ela será depois usada para mostrar que o ponto fixo ω de T_0 é de classe C^{k+1} .

Lema 10.10. *A derivada de ordem $k+1$ de $\gamma = T_0(\alpha)$ pode ser escrita como*

$$D^{k+1}\gamma = \left(B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) \right) (D^{k+1}\alpha \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^{k+1} + \mathcal{F}_{k+1}(\alpha, D\alpha, \dots, D^k\alpha) \quad (10.25)$$

onde $\mathcal{F}_{k+1}(\alpha, D\alpha, \dots, D^k\alpha)$ é uma função polinomial das variáveis

$$\partial_{x_s^i x_u^j}^q \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha), D^q \alpha \circ \psi_\alpha \text{ e } D^q \psi_\alpha \text{ com } i+j=q \text{ e } q=1, \dots, k.$$

Demonstração. A relação (10.19) dá que

$$D\gamma = \left(B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) \right) (D\alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha + \mathcal{F}_1(\alpha),$$

com $\mathcal{F}_1(\alpha) = \partial_{x_s} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha$. O caso geral pode ser deduzido por indução: derivando a relação

$$D^k\gamma = \left(B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) \right) (D^k\alpha \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^k + \mathcal{F}_k(\alpha, D\alpha, \dots, D^{k-1}\alpha)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} D^{k+1}\gamma &= \left(\partial_{x_s x_u}^2 \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \partial_{x_u x_u}^2 \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) (D\alpha \circ \psi_\alpha) D\psi_\alpha \right) (D^k\alpha \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^k \\ &\quad + \left(B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) \right) (D^{k+1}\alpha \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^{k+1} \\ &\quad + \left(B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha) \right) (D^k\alpha \circ \psi_\alpha) \sum_{i=1}^k (D\psi_\alpha)^{i-1} D^2\psi_\alpha (D\psi_\alpha)^{k-i} \\ &\quad + D\mathcal{F}_k(\alpha, D\alpha, \dots, D^{k-1}\alpha). \end{aligned}$$

Tome para $\mathcal{F}_{k+1}(\alpha, D\alpha, \dots, D^{k-1}\alpha, D^k\alpha)$ a soma do primeiro, terceiro e quarto termos do lado direito. É claro que esta expressão tem a forma descrita no enunciado do lema, com $k+1$ no lugar de k . Além disso, com esta notação a igualdade anterior corresponde precisamente a (10.25). \square

Agora, defina

$$T_{k+1} : \mathcal{B}_{k+1} \rightarrow \mathcal{B}_{k+1}, \quad (\alpha, A^1, \dots, A^k, A^{k+1}) \rightarrow (\gamma, \Gamma^1, \dots, \Gamma^k, \Gamma^{k+1})$$

da seguinte forma:

- $(\gamma, \Gamma^1, \dots, \Gamma^k) = T_k(\alpha, A^1, \dots, A^k)$ e
- $\Gamma^{k+1} = (B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)) (A^{k+1} \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^{k+1} + \mathcal{F}_{k+1}(\alpha, A^1, \dots, A^k)$

e note que Γ^{k+1} é limitada. Comparando esta última expressão com (10.25), vemos imediatamente que

$$T_{k+1}(\alpha, D\alpha, \dots, D^k \alpha, D^{k+1} \alpha) = (\gamma, D\gamma, \dots, D^k \gamma, D^{k+1} \gamma)$$

sempre que α é de classe C^k e as suas derivadas até a ordem k são limitadas. Além disso,

Lema 10.11. *A transformação $T_{k+1} : \mathcal{B}_{k+1} \rightarrow \mathcal{B}_{k+1}$ é uma contração nas fibras relativamente à distância $\|\cdot\|_{k+1}$.*

Demonstração. (Compare com a demonstração do Lema 10.8.) É claro da definição que T_{k+1} é um produto semidireto. Também é claro que a aplicação

$$(\alpha, A^1, \dots, A^k) \mapsto \Gamma^{k+1} = (B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)) (A^{k+1} \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^{k+1} + \mathcal{F}_{k+1}(\alpha, A^1, \dots, A^k).$$

é contínua, qualquer que seja A^{k+1} fixado. Para verificar a condição (10.21), fixemos $(\alpha, A^1, \dots, A^k) \in \mathcal{B}_k$ e consideremos duas aplicações limitadas $A_1^{k+1}, A_2^{k+1} : E^s \mapsto \mathcal{L}^{k+1}(E^s, E^u)$ quaisquer. Então temos

$$T_{k+1}(\alpha, A^1, \dots, A^k, A_i^{k+1}) = (\gamma, \Gamma^1, \dots, \Gamma^k, \Gamma_i^{k+1}) \text{ para } i = 1, 2$$

com

$$\Gamma_1^{k+1} - \Gamma_2^{k+1} = (B_u^{-1} + \partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)) ((A_1^{k+1} - A_2^{k+1}) \circ \psi_\alpha) (D\psi_\alpha)^{k+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1^{k+1} - \Gamma_2^{k+1}\|_0 &\leq (\|B_u^{-1}\| + \|\partial_{x_u} \varphi_u(\psi_\alpha, \alpha \circ \psi_\alpha)\|_0) \|(A_1^{k+1} - A_2^{k+1}) \circ \psi_\alpha\|_0 (\|D\psi_\alpha\|_0)^k \\ &\leq (\lambda + \delta) \|(A_1^{k+1} - A_2^{k+1}) \circ \psi_\alpha\|_0 (\lambda + \delta)^k \leq (\lambda + \delta)^{k+1} \|A_1 - A_2\|_0. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação, com $\theta = (\lambda + \delta)^{k+1}$. \square

Combinando este lema com a hipótese de indução e o Teorema 10.9, obtemos que existe A_0^{k+1} tal que

$$T_{k+1}(\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k, A_0^{k+1}) = (\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k, A_0^{k+1})$$

e todo $T_k^n(\alpha, A^1, \dots, A^k, A^{k+1})$ converge para $(\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k, A_0^{k+1})$ quando $n \rightarrow \infty$. Desta forma, recuperamos toda a hipótese de indução.

Agora, considere qualquer $\alpha \in \mathcal{B}_0$ de classe C^{k+1} , por exemplo $\alpha \equiv 0$. Então

$$(T_0^n(\alpha), DT_0^n(\alpha), \dots, D^k T_0^n(\alpha), D^{k+1} T_0^n(\alpha)) = T_{k+1}^n(\alpha, D\alpha, \dots, D^k \alpha, D^{k+1} \alpha)$$

converge para $(\alpha_0, A_0^1, \dots, A_0^k, A_0^{k+1})$ quando $n \rightarrow \infty$. Em outras palavras,

$$T_0^n(\alpha) \rightarrow \alpha_0 \text{ e } D^q T_0^n(\alpha) \rightarrow A_0^q \text{ para } q = 1, \dots, k, k+1$$

uniformemente quando $n \rightarrow \infty$. Então (Exercício 10.6), a função α_0 é de classe C^{k+1} com $D^q \alpha_0 = A_0^q$ para $q = 1, \dots, k, k+1$. Isto conclui o argumento por indução.

Desta forma, mostramos que o ponto fixo α_0 da transformação de gráfico T_0 é de classe C^k se o difeomorfismo g é de classe C^k , qualquer que seja $k \geq 1$. Em particular, α_0 é de classe C^∞ se g é de classe C^∞ .

10.3.4 Conclusão

O próximo passo é interpretar o gráfico de α_0 em termos da dinâmica. Segue do Lema 10.4 que $\text{graf } \alpha_0$ é invariante por g :

$$\text{graf } \alpha_0 = \text{graf } T_0(\alpha_0) = g(\text{graf } \alpha_0).$$

Também temos que $\text{graf } \alpha_0$ é tangente ao espaço horizontal E^s na origem:

Lema 10.12. $\alpha_0(0) = 0$ e $D\alpha_0(0) = 0$.

Demonstração. Seja $\psi_0 = \psi_{\alpha_0}$ a inversa da aplicação $y_s \mapsto B_s^{-1}y_s + \varphi_s(y_s, \alpha_0(y_s))$. Note que $\psi_0(0) = 0$. Então, como $(\alpha_0, D\alpha_0)$ é ponto fixo de T_1 , as definições (10.17) e (10.18) dão que

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= B_u^{-1}\alpha_0(0) + \varphi_u(0, \alpha_0(0)), \\ D\alpha_0(0) &= B_u^{-1}D\alpha(0)D\psi_0(0) + \partial_{x_s}\varphi_u(0, \alpha(0))D\psi_0(0) + \partial_{x_u}\varphi_u(0, \alpha(0))D\alpha_0(0)D\psi_0(0). \end{aligned} \quad (10.26)$$

Como $\|B_u^{-1}\| \leq \lambda$, $\varphi_u(0, 0) = 0$ e φ_u é δ -lipschitziana, segue da primeira igualdade que

$$\|\alpha_0(0)\| \leq \lambda\|\alpha_0(0)\| + \delta\|\alpha_0(0)\|.$$

Como $\lambda + \delta < 0$, isto implica que $\alpha_0(0) = 0$. Agora a segunda igualdade em (10.26) reduz-se a

$$D\alpha_0(0) = B_u^{-1}D\alpha(0)D\psi_0(0).$$

Como $\|B_u^{-1}\| \leq \lambda < 1$ e $\|D\psi_0(0)\| \leq \lambda/(1 - \delta\lambda) < 1$, por (10.11) e (10.8), segue que $D\alpha_0(0) = 0$. \square

Além disso, $\text{graf}(\alpha_0)$ coincide com a variedade instável do ponto fixo $p = 0$ do difeomorfismo g :

Lema 10.13. Para qualquer $x \in E$, as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $x \in \text{graf } \alpha_0$;
- (b) a sequência $(g^{-n}(x))_n$ converge para a origem;
- (c) a sequência $(g^{-n}(x))_n$ é limitada;

Demonstração. Começemos por mostrar que (a) implica (b). Seja $x = (x_s, \alpha_0(x_s))$ um ponto no gráfico de α_0 . De acordo com (10.13),

$$g^{-1}(x_s, \alpha_0(x_s)) = (\psi_0(x_s), \alpha_0(\psi_0(x_s))) \text{ para todo } x_s \in E^s.$$

Como $\psi_0(0) = 0$ e $\frac{\lambda}{1 - \delta\lambda} < 1$ é constante de Lipschitz para ψ_0 , temos que

$$\|\psi_0(x_s)\| \leq \frac{\lambda}{1 - \delta\lambda} \|x_s\| \quad (10.27)$$

para todo $x_s \in E^s$. Portanto,

$$g^{-n}(x_s, \alpha_0(x_s)) = (\psi_0^n(x_s), \alpha_0(\psi_0^n(x_s))) \text{ e } \|\psi_0^n(x_s)\| \leq \frac{\lambda^n}{(1 - \delta\lambda)^n} \|x_s\|$$

para todo $x_s \in E^s$ e todo $n \geq 1$. Usando o fato de que $\alpha_0(0) = 0$ e α_0 é 1-lipschitziana, obtemos que

$$\|g^{-n}(x_s, \alpha_0(x_s))\| = \max\{\|\psi_0^n(x_s)\|, \|\alpha_0(\psi_0^n(x_s))\|\} = \|\psi_0^n(x_s)\| \leq \frac{\lambda^n}{(1 - \delta\lambda)^n} \|x_s\|$$

para todo $n \geq 1$ e, portanto, $g^{-n}(x_s, \alpha_0(x_s))$ converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Isto mostra que (a) implica (b).

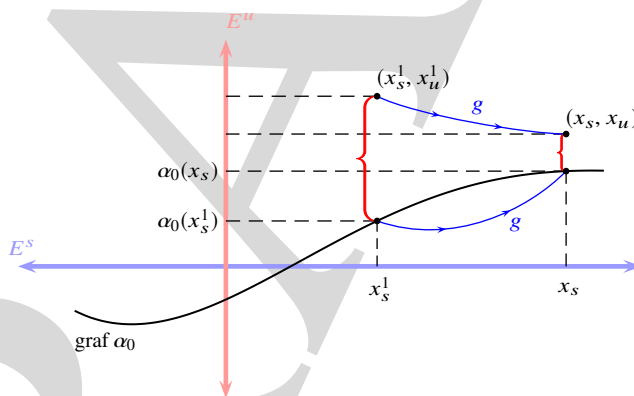


Figura 10.3: Provando que a variedade instável da origem para g está contida em $\text{graf } \alpha_0$.

É claro que (b) implica (c). Para mostrar que (c) implica (a), considere qualquer ponto $(x_s, x_u) \in E$ e seja $(x_s^1, x_u^1) = g^{-1}(x_s, x_u)$. Afiramos que

$$\|x_u - \alpha_0(x_s)\| \leq \frac{\lambda + \delta}{1 - 2\delta\lambda} \|x_u^1 - \alpha_0(x_s^1)\|. \quad (10.28)$$

Isto pode ser visto da seguinte forma (confira também a Figura 10.3). Seja $y_s = \psi_0(x_s)$. Então temos que $g(y_s, \alpha_0(x_s)) = (x_s, \alpha_0(x_s))$ e $g(x_s^1, x_u^1) = (x_s, x_u)$, ou seja,

$$\begin{aligned} x_s &= B_s^{-1} y_s + \varphi_s(y_s, \alpha_0(y_s)) \text{ e } x_s = B_s^{-1} x_s^1 + \varphi_s(x_s^1, x_u^1) \\ \alpha_0(x_s) &= B_u^{-1} \alpha_0(y_s) + \varphi_u(y_s, \alpha_0(y_s)) \text{ e } x_u = B_u^{-1} x_u^1 + \varphi_u(x_s^1, x_u^1). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Por um lado, as duas primeiras igualdades dão que $x_s^1 - y_s = B_s(\varphi_u(y_s, \alpha_0(y_s)) - \varphi_s(x_s^1, x_u^1))$ e, portanto,

$$\|x_s^1 - y_s\| \leq \lambda \delta (\|x_s^1 - y_s\| + \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\|).$$

Segue que

$$\|x_s^1 - y_s\| \leq \frac{\delta \lambda}{1 - \delta \lambda} \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\| \quad (10.30)$$

Então, as duas últimas igualdades em (10.29) dão que

$$\begin{aligned} \|x_u - \alpha_0(x_s)\| &\leq \lambda \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\| + \delta (\|x_s^1 - y_s\| + \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\|) \\ &\leq \left(\lambda + \delta + \frac{\delta^2 \lambda}{1 - \delta \lambda} \right) \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\| \leq \frac{\lambda + \delta}{1 - \delta \lambda} \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\|. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Como α_0 é 1-lipschitziana, a desigualdade (10.30) também acarreta

$$\|\alpha_0(x_s^1) - \alpha_0(y_s)\| \leq \|x_s^1 - y_s\| \leq \frac{\delta \lambda}{1 - \delta \lambda} \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\|$$

e, portanto, pela desigualdade triangular,

$$\|x_u^1 - \alpha_0(x_s^1)\| \geq \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\| - \|\alpha_0(x_s^1) - \alpha_0(y_s)\| \geq \frac{1 - 2\delta \lambda}{1 - \delta \lambda} \|x_u^1 - \alpha_0(y_s)\|. \quad (10.32)$$

Combinando (10.31) e (10.32), obtemos a afirmação em (10.28):

$$\|x_u - \alpha_0(x_s)\| \leq \frac{\lambda + \delta}{1 - 2\delta \lambda} \|x_u^1 - \alpha_0(x_s^1)\|.$$

Para concluir, escreva $(x_s^n, x_u^n) = g^{-n}(x_s, x_u)$ para cada $n \geq 1$. A relação (10.28) dá que

$$\|x_u - \alpha_0(x_s)\| \leq \left(\frac{\lambda + \delta}{1 - 2\delta \lambda} \right)^n \|x_u^n - \alpha_0(x_s^n)\|$$

A condição (10.8) garante que o fator $\left(\frac{\lambda + \delta}{1 - 2\delta \lambda} \right)^n$ vai para zero quando $n \rightarrow \infty$. Por hipótese, as sequências $(x_s^n)_n$ e $(x_u^n)_n$ são limitadas e, portanto, o fator $\|x_u^n - \alpha_0(x_s^n)\|$ é limitado. Segue que a expressão no lado esquerdo converge para zero quando $n \rightarrow \infty$. Isso implica que $x_u = \alpha_0(x_s)$, tal como queríamos provar. Desta forma, ficou provado que (c) implica (a). \square

Para concluir a demonstração do Teorema 10.3, considere $\rho > 0$ e defina

$$\phi : V \rightarrow E, \quad \phi(x_s) = (x_s, \alpha_0(x_s)) \quad (10.33)$$

onde $V = \{x_s \in E^s : \|x_s\| < \rho\}$. Então ϕ é um mergulho de classe C^k e as propriedades no Lema 10.12 significam que $\phi(0) = 0$ e $D\phi(0)E^s = E^s$. Vimos em (10.13) que

$$g^{-1}(x_s, \alpha_0(x_s)) = (y_s, \alpha_0(y_s)) \text{ com } y_s = \psi_0(x_s).$$

Como a relação (10.27) implica que $\|y_s\| \leq \|x_s\|$, segue que $g^{-1}(\phi(V)) \subset V$.

Por construção, $g = f^{-1}$ em $B_r(0)$, ou seja, $f = g^{-1}$ em $f^{-1}(B_r(0))$. Supondo que ρ é suficientemente pequeno com relação a r , temos que $\phi(V) \subset f^{-1}(B_r(0))$ e então a observação anterior significa que $f(\phi(V)) \subset \phi(V)$. Além disso,

$$f^n(\phi(x_s)) = g^{-n}(\phi(x_s)) \text{ para todo } n \geq 1 \text{ e todo } x_s \in V.$$

Usando o Lema 10.13, concluímos que

- $f^n(\phi(x_s))$ converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x_s \in V$;
- se (x_s, x_u) é tal que $f^n(x_s, x_u) \in f^{-1}(B_r(0))$ para todo $n \geq 1$ então $(x_s, x_u) = \phi(x_s)$.

Pelo Teorema de Grobman–Hartman, reduzindo ρ se necessário, podemos supor que existe um homeomorfismo $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ definido em $\mathcal{V} = \{x_s + x_u \in E^s \oplus E^u : \|x_s\| < \rho \text{ e } \|x_u\| < \rho\}$ e conjugando f à sua derivada $B = Df(0)$, ou seja, satisfazendo

$$h(f(x)) = Bh(x) \text{ para todo } x \in \mathcal{V} \cap f^{-1}(\mathcal{V}).$$

Além disso, podemos supor que $\mathcal{V} \subset f^{-1}(B_r(0))$. Então, pelas observações anteriores,

- $f(\phi(V)) \subset \phi(V)$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$ para todo $x \in \phi(V)$;
- se $f^n(x) \in \mathcal{V}$ para todo $n \geq 0$ então $x \in \phi(V)$.

Estas duas últimas propriedades também implicam que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$ se e somente se existe $k \geq 0$ tal que $f^k(x) \in \phi(V)$.

Isto mostra que $\phi(V)$ é uma variedade estável local do ponto fixo $p = 0$ do difeomorfismo f , de acordo com as condições (A) a (C) na Seção 10.2.

Resta mostrar que ϕ se estende a uma imersão $\phi : E \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^k cuja imagem é a variedade estável (global) $W^s(0)$. Vimos em (10.11) que o difeomorfismo $\psi_0 : E^s \rightarrow E^s$ é lipschitziano, com constante de Lipschitz $\lambda/(1 - \delta\lambda) < 1$. Além disso,

$$f(\phi(x_s)) = g^{-1}(\phi(x_s)) = \phi(\psi_0(x_s)) \text{ para todo } x_s \in V. \quad (10.34)$$

Dado qualquer $x_s \in E^s$ escolha $n \geq 0$ tal que $\psi_0^n(x_s) \in V$ e defina

$$\phi(x_s) = f^{-n}(\phi(\psi_0^n(x_s))). \quad (10.35)$$

A relação (10.34) garante que a definição não depende da escolha de n . Desta forma obtemos uma aplicação ϕ definida em todo E^s e cuja imagem coincide com

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\phi(V)) = W^s(p).$$

É claro da construção que ϕ é de classe C^k , uma vez que o número n pode sempre ser escolhido constante na vizinhança de qualquer ponto dado. Também é claro que ϕ é uma imersão, ou seja, que a derivada

$$D\phi(x_s) = Df^{-n}(\phi(\psi_0^n(x_s)))D\phi(\psi_0^n(x_s))D\psi_0^n(x_s)$$

é injetiva em todo ponto. Finalmente, observe que a restrição de ϕ a V , definida em (10.33), é injetiva e que o mesmo vale para as aplicações f^{-n} e ψ_0^n . Segue facilmente que a imersão $\phi : E^s \rightarrow W^s(p)$ definida por (10.35) é injetiva.

10.4 Trajetórias periódicas hiperbólicas

Para encerrar este capítulo, vamos enunciar o Teorema da Variedade Estável para trajetórias periódicas de fluxos. Começemos por estender as definições relevantes para este contexto.

Seja γ uma trajetória periódica do fluxo $(f^t)_t$ de um campo de vetores F de classe C^k , com $k \geq 1$. Continuamos supondo que o fluxo é completo. A *variedade estável* $W^s(\gamma)$ e a *variedade instável* $W^u(\gamma)$ são definidas por

$$W^s(\gamma) = \{x \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t(x), \gamma) = 0\} \text{ e}$$

$$W^u(\gamma) = \{x \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(f^t(x), \gamma) = 0\}.$$

Fixe um ponto $p \in \gamma$ e uma seção transversal S ao fluxo em p . Considere a correspondente transformação de retorno (Seção 5.3.2)

$$P : S' \rightarrow S'', \quad x \rightarrow P(x),$$

onde S' e S'' são vizinhanças de p dentro de S . Sabemos que $P(p) = p$ e que P é um difeomorfismo de classe C^k . Dizemos que γ é uma *trajetória periódica hiperbólica* se p é um ponto fixo hiperbólico da transformação de retorno P , ou seja, se todos os valores característicos da derivada

$$DP(p) : T_p S' \rightarrow T_p S''$$

têm parte real não nula.

Observe que a definição não depende das escolhas de $p \in \gamma$ e de S . De fato, seja \tilde{S} qualquer seção transversal ao fluxo num ponto $\tilde{p} \in \gamma$ e seja $\tilde{P} : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}''$ a correspondente transformação de retorno. Além disso, seja $R : U \rightarrow \tilde{U}$ uma transformação de Poincaré onde U é uma vizinhança de p dentro de S e \tilde{U} é uma vizinhança de \tilde{p} dentro de \tilde{S} . Segue diretamente da definição que $R \circ P = \tilde{P} \circ R$ e, portanto,

$$DR(p) \circ DP(p) = D\tilde{P}(\tilde{p}) \circ DR(p).$$

Portanto, as derivadas $DP(p)$ e $D\tilde{P}(\tilde{p})$ são similares e, logo, uma é hiperbólica se e somente se a outra é.

Para cada $p \in \gamma$, representamos por E_p^s o subespaço estável e por E_p^u o subespaço instável de $DP(p)$. Além disso, consideramos

$$E_p^{cs} = \{cF(p) + v^s : c \in \mathbb{R} \text{ e } v^s \in E_p^s\} \quad \text{e}$$

$$E_p^{cu} = \{cF(p) + v^u : c \in \mathbb{R} \text{ e } v^u \in E_p^u\}.$$

Teorema 10.14 (Teorema da Variedade Estável para trajetórias periódicas de fluxos). *Seja $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$, e seja $\gamma \subset \mathcal{U}$ uma trajetória periódica hiperbólica. Então existe uma vizinhança V da origem em E^s e existe um mergulho $\phi : \gamma \times V \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^k cuja imagem $W_{\text{loc}}^s(\gamma) = \phi(\gamma \times V)$ satisfaz*

- (a) $f^t(W_{\text{loc}}^s(\gamma)) \subset W_{\text{loc}}^s(\gamma)$ para todo $t > 0$;
- (b) $\phi(p, 0) = p$ e $D\phi(0, p)E_p^{cs} = E_p^{cs}$ (portanto, $W_{\text{loc}}^s(\gamma)$ é tangente a E_p^{cs}) para todo $p \in \gamma$;
- (c) $W^s(\gamma) = \bigcup_{s>0} f^{-s}(W_{\text{loc}}^s(\gamma))$;
- (d) ϕ se estende a uma imersão injetiva $\phi : \gamma \times E^s \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^k cuja imagem é $W^s(\gamma)$.

Valem fatos análogos para a variedade instável, substituindo $(f^t)_t$ e E^{cs} por $(f^{-t})_t$ e E^{cu} .

Deixamos a cargo do leitor deduzir este resultado do Teorema 10.3 (Exercício 10.13). Confira também o Exercício 10.12.

10.5 Experimento: equação de onda

A *equação de onda*, uma das mais importantes da Física Matemática, é a equação diferencial parcial

$$\partial_t^2 u = v^2 (\partial_{x_1 x_1}^2 u + \cdots + \partial_{x_d x_d}^2 u). \quad (10.36)$$

Ela descreve a propagação de diferentes tipos de onda: aquáticas, sonoras, eletromagnéticas, gravitacionais etc. A variável t representa o tempo, x_1, \dots, x_d são coordenadas espaciais e v é um parâmetro real não nulo, que corresponde à velocidade de propagação.

Por exemplo, quando a dimensão espacial d é igual a 1, esta equação reduz-se a

$$\partial_t^2 u = v^2 \partial_{xx}^2 u. \quad (10.37)$$

Esta relação pode ser deduzida das leis da Física, mais especificamente da lei de Hooke (Exemplo 1.2), da seguinte forma. Considere uma cadeia formada por objetos pontuais idênticos com massa m , ligados por pequenas molas idênticas com comprimento h e coeficiente de elasticidade c . Observe a Figura 10.4.

Represente por $u(t, jh)$ a posição do j -ésimo objeto pontual em cada momento. Esse objeto sofre a ação das forças exercidas pelas molas que o ligam aos dois objetos

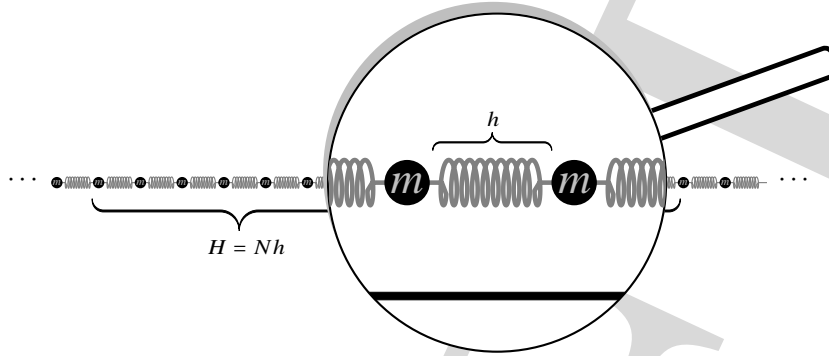


Figura 10.4: Deduzindo a equação de onda unidimensional a partir da lei de Hooke.

vizinhos, ou seja, de números $j - 1$ e $j + 1$. De acordo com a lei de Hooke, essas forças são dadas por

$$F_{j-1,j} = -c(u(t, jh) - u(t, (j-1)h) - h) \quad \text{e} \quad F_{j+1,j} = c(u(t, (j+1)h) - u(t, jh) - h),$$

respectivamente. Então, pela 3ª lei de Newton,

$$m\partial_{tt}^2 u(t, jh) = F_{j-1,j} + F_{j+1,j} = c(u(t, (j+1)h) - 2u(t, jh) + u(t, (j-1)h)).$$

Então, representando por N o número de objetos na cadeia e por $H = Nh$ o comprimento total, $M = Nm$ a massa total e $C = c/N$ o coeficiente global de elasticidade,

$$\partial_{tt}^2 u(t, jh) = \frac{CH^2}{M} \frac{u(t, (j+1)h) - 2u(t, jh) + u(t, (j-1)h)}{h^2}.$$

Fixando H , M e C , e fazendo $N \rightarrow \infty$ (portanto, $h \rightarrow 0$) obtemos

$$\partial_{tt}^2 u(t, x) = \frac{CH^2}{M} \partial_{xx}^2 u(t, x),$$

que é a equação (10.37) com $v^2 = CH^2/M$. Também podemos fazer o comprimento H ir para infinito, usando que a massa M é diretamente proporcional a H , enquanto que o coeficiente de elasticidade C é inversamente proporcional a H . Desta forma obtemos

$$\partial_{tt}^2 u(t, x) = K \partial_{xx}^2 u(t, x),$$

onde o coeficiente K depende apenas da estrutura e do material da cadeia.

Ao contrário da grande maioria das equações diferenciais, (10.37) pode ser resolvida analiticamente de modo bastante fácil. De fato, considere as variáveis $z = x + vt$ e $w = x - vt$ e a função ϕ definida por $\phi(z, w) = u(t, x)$. Então,

$$\begin{aligned} v^2 \partial_{xx}^2 u - \partial_{tt}^2 u &= v^2 (\partial_{zz}^2 \phi + 2\partial_{zw}^2 \phi + \partial_{ww}^2 \phi) - (v^2 \partial_{zz}^2 \phi - 2v^2 \partial_{zw}^2 \phi + v^2 \partial_{ww}^2 \phi) \\ &= 4v^2 \partial_{zw}^2 \phi. \end{aligned}$$

Em outras palavras, (10.37) transforma-se na relação

$$\partial_{zw}^2 \phi = 0,$$

cujas soluções são as funções da forma $\phi(z, w) = \phi_1(z) + \phi_2(w)$. Isto mostra que a solução geral de (10.37) tem a forma

$$u(t, x) = u_1(x + vt) + u_2(x - vt). \quad (10.38)$$

Esta expressão pode ser interpretada como a soma de uma função u_1 que “viaja para a esquerda” com uma função u_2 que “viaja para a direita”: os gráficos dessas funções permanecem inalterados, exceto que eles são transladados com velocidade v , em sentidos opostos, quando o tempo varia.

?? ??

Objetivos:

1. Escreva, em código do MATLAB/Octave ou outro ambiente computacional, um roteiro que integre a equação (10.37) utilizando o método pseudo-espectral.
2. Simule uma onda viajante em domínio perfeitamente periódico, ou seja, com $u(x_1, t) = u(x_N, t)$.
3. Simule uma onda viajante em uma caixa rígida, ou seja, com $u(x_1, t) = u(x_N, t) = 0$. Observe como a onda é refletida.
4. Você observa perda de "energia" (diminuição da amplitude de onda) quando a onda é refletida? Por quê?
5. Planeje e execute um experimento numérico para confirmar (10.38).
6. Experimente com diferentes condições iniciais e de fronteira buscando soluções interessantes. Em especial, tente simular soluções que você tenha observado ao brincar com uma corda.

10.6 Exercícios

Exercício 10.1. Seja p um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Mostre que se existe uma sequência injetiva $(p_k)_k$ de pontos periódicos convergindo para p então existe uma sequência $(q_k)_k$ de pontos periódicos convergindo para um ponto $q \in W^u(p)$ distinto de p .

Exercício 10.2. Verifique que as aplicações ϕ^s e ϕ^u em (10.4) estão bem definidas, que elas são contínuas e injetivas e que as suas imagens coincidem com $W^s(p)$ e $W^u(p)$, respectivamente.

Exercício 10.3. Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sequências de números reais positivos tais que $\sum_n a_n < \infty$ e $(b_n)_n \rightarrow 0$. Mostre que a sequência $\sum_{j=1}^n a_{n-j} b_j$ converge para zero.

Exercício 10.4. Verifique que a distância definida em \mathcal{B}_0 por (10.14) é completa. Analogamente, verifique que a distância definida em \mathcal{B}_k por (10.24) é completa, qualquer que seja $k \geq 1$.

Exercício 10.5. Mostre que a aplicação γ do Lema 10.4 é única.

Exercício 10.6. Sejam V e W dois espaços de Banach e seja $f_n : V \rightarrow W$, $n \geq 1$ uma sequência de funções diferenciáveis tais que

1. a sequência $(f_n)_n$ converge uniformemente para alguma função $f : V \rightarrow W$
2. a sequência das derivadas $(Df_n)_n$ converge uniformemente para alguma $F : V \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$.

Mostre que f é derivável e $Df = F$.

Exercício 10.7. Sejam $(B, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $f : B \rightarrow B$ uma aplicação bijetiva e lipschitziana com inversa lipschitziana. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $g = f + \phi$ é bijetiva e lipschitziana com inversa lipschitziana, para toda aplicação ϵ -lipschitziana $\phi : B \rightarrow B$ com $\|\phi\| < \epsilon$.

Exercício 10.8. Seja $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores linear hiperbólico e seja $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ a respectiva decomposição em espaço estável e espaço instável. Usando o Exercício 6.23, mostre que

1. $e^{tA}(\mathcal{W} \cap E^s) \subset \mathcal{W} \cap E^s$ para todo $t > 0$;
2. $e^{tA}v \in \mathcal{W}$ para todo $t > 0$ se e somente se $v \in \mathcal{W} \cap E^s$;
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}v = 0$ se e somente se existe $s > 0$ tal que $e^{sA}v \in \mathcal{W} \cap E^s$;
4. valem propriedades análogas para $\mathcal{W} \cap E^u$, com e^{-tA} no lugar de e^{tA} ;

e deduza as propriedades (A) a (D) da Seção 10.2.

Exercício 10.9. Seja \mathcal{K} um conjunto invariante pelo fluxo de um campo de vetores F de classe C^1 em \mathbb{R}^d . Mostre que se \mathcal{K} é homeomorfo à bola unitária fechada de \mathbb{R}^d então existe ao menos um ponto singular de F em \mathcal{K} .

[Dica: Prove primeiro que dado $t_0 \in \mathbb{R}$ existe $p_{t_0} \in \mathcal{K}$ tal que $\varphi(t_0, p_{t_0}) = p_{t_0}$.]

Exercício 10.10. Seja γ uma trajetória periódica hiperbólica de um campo de vetores $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 . Mostre que γ é isolada no seguinte sentido:

1. existe um aberto \mathcal{V} tal que γ é a única trajetória periódica de F contida em \mathcal{V} e
2. para todo $T > 0$ existe uma vizinhança \mathcal{V}_T de γ tal que nenhuma trajetória periódica de período menor que T intersecta \mathcal{V}_T .

Exercício 10.11. Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ uma família parametrizada de classe C^1 de campos de vetores e seja γ uma trajetória periódica hiperbólica de F_0 . Mostre que existe uma função $\lambda \mapsto p(\lambda)$ de classe C^1 numa vizinhança de $\lambda = 0$ tal que $p(0) \in \gamma$ e a trajetória de cada $p(\lambda)$ para F_λ é periódica.

Exercício 10.12. Suponha que γ é trajetória periódica hiperbólica de um campo de vetores F de classe C^1 e seja $x \in \mathcal{U}$ um ponto qualquer. Mostre que $x \in W^s(\gamma)$ se e somente se existe $q \in \gamma$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t(x), f^t(q)) = 0$. Mostre, por meio de um exemplo, que a conclusão não é necessariamente verdadeira quando γ não é hiperbólica.

Exercício 10.13. Demonstre o Teorema 10.14 a partir do Teorema 10.3.

Exercício 10.14. Use expansão em série de Fourier $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(t) e^{2\pi i k x}$ para encontrar a expressão geral das soluções da equação de onda (10.37) que são periódicas na segunda variável.

[Observação: Em outras palavras, trata-se de resolver a equação de onda no caso em que x é uma variável angular, ou seja, que o ambiente espacial é o círculo S^1 .]

Exercício 10.15. Dadas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, encontre a expressão da solução da equação de onda (10.37) com condição inicial $u(0, x) = f(x)$ e $\partial_t u(0, x) = g(x)$.

Exercício 10.16 (C). O atrator de Rössler é a equação diferencial de dimensão 3

$$x' = -y - z, \quad y' = x + ay, \quad z' = b + xz - cz, \quad (10.39)$$

onde a, b e c são parâmetros reais. Fixando $a = 0, 2$ e $b = 0, 2$, analise numericamente o comportamento das soluções para diferentes valores de c , incluindo $c = 2, 3, c = 3, 3, c = 5, 3$ e $c = 6, 3$. Em particular, verifique que os menores valores de c existe um *ciclo limite*, ou seja, uma trajetória periódica que atrai todas as trajetórias próximas, mas ele parece desaparecer quando c aumenta.

10.7 Notas

O Teorema da Variedade Estável foi devido originalmente a Hadamard [37] e a Perron [89, 90, 91], os quais usaram métodos bastantes distintos. Embora o teorema tenha sido redemonstrado por vários autores, é justo dizer que as demais demonstrações são apenas variações dessas duas ideias. A esse respeito, o matemático russo Dmitry Anosov (1936–2014) escreveu em seu famoso trabalho [5]: “A cada cinco anos, aproximadamente, talvez até menos, alguém “descobre” o teorema de Hadamard e Perron, demonstrando-o pelo método de Hadamard ou pelo método de Perron. Eu mesmo fui culpado disso.”

O método de Hadamard, ou método da transformação de gráfico, é aquele que apresentamos neste capítulo. Ele está baseado no Teorema do Ponto Fixo, como vimos, e tem a vantagem de ter uma interpretação bastante geométrica. Por outro lado, a verificação da diferenciabilidade do ponto fixo é razoavelmente trabalhosa. O método de Perron está baseado no Teorema da Função Implícita, o que permite obter a diferenciabilidade de modo mais rápido. Por outro lado, a motivação geométrica é menos aparente. O livro de Palis e de Melo [84, 85] contém uma apresentação moderna do método de Perron.

O matemático francês Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) desenvolveu a maior parte da sua carreira em Paris. Ele deu contribuições de primeira linha à Geometria Diferencial, à Teoria dos Números, à Teoria das Funções de Variável Complexa e

às Equações Diferenciais Parciais. Hadamard foi convidado por 12 vezes para proferir palestra no Congresso Internacional de Matemáticos, o que talvez constitua recorde absoluto na história desse prestigioso evento.

O matemático alemão Oskar Perron (1880–1975) realizou a maior parte da sua carreira na Universidade de Heidelberg, de 1914 a 1922, e na Universidade de Munique, de 1922 a 1951. Ele fez numerosas e importantes contribuições à Teoria das Equações Diferenciais, tanto ordinárias quanto parciais. Entre os seus resultados mais conhecidos e mais utilizados está o Teorema de Perron–Fröbenius que afirma que *se uma matriz tem todas as entradas positivas então o maior valor característico, em módulo, é um número positivo, ele tem multiplicidade (tanto algébrica quanto geométrica) igual a 1 e ele admite autovetores com coeficientes positivos*. Lembremos também da contribuição fundamental de Perron à Teoria da Estabilidade de Lyapunov, que já foi comentada no Capítulo 8.

O problema de entender as vibrações das cordas de instrumentos musicais despertou o interesse de diversos matemáticos importantes no século 18. Motivado por esse problema, em 1746 d’Alembert descobriu a equação de onda unidimensional (10.37). Pouco tempo depois, Euler introduziu a equação tridimensional, (10.36) com $d = 3$, que tem aplicações a muitos outros fenômenos físicos. Outro pioneiro que deu contribuições importantes foi o matemático, físico e médico suíço Daniel Bernoulli (1700–1782), filho de Johann Bernoulli e sobrinho de Jacob Bernoulli, que também foi um dos precursores da teoria cinética dos gases.

O matemático, físico e filósofo francês Jean le Rond d’Alembert (1717–1783), desenvolveu importantes trabalhos em equações diferenciais, tanto ordinárias quanto parciais. Mais além da matemática, celebrou-se por, juntamente Denis Diderot (1713–1784) ter dirigido o grande projeto da *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, obra monumental editada entre 1751 e 1772 com o objetivo de sintetizar todo o conhecimento da época. A *Encyclopédie* foi uma das grandes realizações do chamado *Século das Luzes* e exerceria influência determinante nas ideias da Declaração da Independência dos Estados Unidos e na Revolução Francesa de 1789.

O atrator de Rössler (10.39) é um modelo teórico introduzido em 1976 pelo bioquímico alemão Otto Eberhard Rössler, que depois se mostrou útil na descrição de certas reações químicas. É um dos exemplos mais populares de sistema com comportamento “caótico”.

DRAFT